L'ANALYSE DE COVARIANCE THÉORIE ET APPLICATION DANS L'EXPÉRIMENTATION FORESTIÈRE

PAR

R. TOMASSONE

Ingénieur des Eaux et Forêts
Assistant au Centre National
de Recherches forestières (Station de Biométrie)

I — INTRODUCTION

Quand il utilise un plan d'expérience, l'expérimentateur désire contrôler les facteurs qu'il veut étudier de la façon la plus précise: avec les diverses mesures d'un même caractère il fait une analyse de variance. D'autre part, des renseignements précieux lui sont fournis par les mesures d'autres caractères concomitants. Avec l'ensemble des mesures de ces différents caractères, il peut faire une analyse de variance généralisée (1). Notre objet ici est différent. A partir de ce même ensemble de mesures, nous nous proposons d'étudier un seul caractère, en éliminant l'effet des autres. Prenons le cas simple d'une expérience forestière: on désire comparer la production des peuplements d'une essence particulière soumise à des types d'éclaircie différents. Si on étudie quatre types d'éclaircie, un bon plan d'expérience consiste à prendre un carré latin 4×4 . L'affectation des modalités d'éclaircie se fait suivant un schéma classique (2). Malgré toutes les précautions, on ne peut empêcher une certaine hétérogénéité des arbres soumis aux différentes modalités. Il est donc nécessaire de tenir compte des conditions initiales de l'expérimentation (3).

On peut se demander si dans d'autres cas que celui que nous venons de citer cette analyse ne constitue pas un luxe superflu. En effet, l'objet même de la mise en place d'un plan d'expérience est de contrôler les facteurs qui ne sont pas intéressants à analyser: pour le faire, on distribue les traitements au hasard au sein d'une même unité de comparaison (4). L'analyse de covariance ne devrait donc rien apporter de nouveau: ce résultat est toutefois beaucoup plus théorique que réel. Il est bon de tenir compte de ces effets extérieurs et difficilement contrôlables. En utilisant un plan d'expérience et en mesurant les variables concomitantes, le résultat ne pourra être que plus précis.

(1) Cf. DEMPSTER (P.A.), op. cit.

(2) Cf. par ex. VESSEREAU (A.), op. cit., p. 224-236.

(3) Des expériences de ce type sont en cours d'exécution à la Station Centrale de Sylviculture et de Production. Cf. aussi MACKENZIE (A.M.), op. cit.

(4) Dans un plan d'expérience en blocs complets ou incomplets, l'unité de comparaison est le bloc. On appelle traitements les facteurs qu'on désire analyser. Dans l'expérience en carré latin citée plus haut les variantes du traitement « intensité d'éclaircie » sont les différents types d'éclaircie; pour ces définitions cf. DUGUÉ (D.), op. cit., p. 259-260.

II — THEORIE DE L'ANALYSE DE COVARIANCE

Nous avons indiqué les points essentiels de l'analyse aussi bien théoriquement que pour les applications: la partie théorique est notée en caractères plus fins; le lecteur qui ne veut voir que l'application peut fort bien sauter les passages correspondants.

II. 1 — Le modèle linéaire utilisé.

Les modèles mathématiques généralement adoptés dans l'étude des plans d'expérience sont linéaires. Cela signifie qu'on ne s'intéresse qu'à des variations du premier ordre entre les traitements à étudier et à comparer. Cette hypothèse est logique puisque dans les expériences courantes on cherche à déceler des différences faibles.

De même lorsqu'on étudie la régression d'une variable dépendante Y en fonction de variables indépendantes X_1 on adopte un modèle linéaire:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_p X_p$$

Il s'agit alors d'une linéarité en fonction des coefficients de régression (1); on peut très bien utiliser comme variable indépendante X_1 une fonction quelconque de X_1 (2).

Pour démontrer les résultats généraux que nous appliquerons par la suite à des exemples nous emploierons la notation matricielle maintenant très utilisée même dans le domaine biologique (3).

II. 2 — Notations.

Supposons qu'on ait effectué n mesures d'un caractère Y , nous pouvons représenter ce résultat par un vecteur « colonne » unique

(1) Cf. KENDALL (M.G.), and STUART (A.), op. cit., p. 355.

(2) Dans le domaine forestier on utilise couramment des tarifs de cubage dans lesquels le volume est une fonction linéaire du carré de la circonférence.

(3) Le calcul matriciel par sa grande concision est un outil extrêmement efficace; il permet de condenser en une seule formule tout un ensemble d'équations. Pour une étude du calcul matriciel très suffisante pour un biologiste cf. MONJALLO (A.), op. cit. ou VIGNAL (J.), op. cit. Une matrice sera toujours écrite avec un caractère **et** $\mathbf{A}$, il en sera de même pour un vecteur qui n'est qu'une matrice particulière. Pour plus de détails au sujet de ces notations, cf. TOMASSONE (R.), op. cit., p. 603-606.

que nous appellerons vecteur observation et que nous noterons :

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix}$$

Sur les n éléments étudiés on a mesuré p autres caractères que nous représenterons par la matrice :

$$X = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np} \end{Bmatrix}$$

cette matrice est évidemment formée par la juxtaposition de p vecteurs « colonne » ; chaque vecteur est associé à l'un des p caractères.

Supposons enfin qu'on veuille comparer t traitements, le vecteur traitement est défini par (1) :

$$\Theta = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_t \end{Bmatrix}$$

(1) Notons que les composantes de Θ ne sont pas obligatoirement les paramètres correspondant à un seul facteur contrôlé. Pour un plan d'expérience en blocs complets les θ sont aussi bien les paramètres relatifs aux traitements proprement dits qu'aux blocs. Le test de l'effet des divers facteurs s'effectue après avoir effectué une partition de Θ .

Le modèle mathématique que nous utiliserons est donc :

$$(II.1) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{A} \Theta + \mathbf{X} \mathbf{B} + \varepsilon$$

où : $\mathbf{A}$ est une matrice ($n \times t$) donnée dépendant du plan d'expérience (1)

$\mathbf{B}$ est un vecteur ($p \times 1$) dont les p composantes β sont les coefficients de régression partielle de y par rapport aux x

ε est un vecteur ($n \times 1$) dont les composantes ε_i sont distribuées normalement avec une moyenne nulle et une variance σ^2 .

II. 3 — Calcul des coefficients de régression et des paramètres des traitements.

On applique le théorème des moindres carrés en cherchant à rendre minimum la quantité :

$$U = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2;$$

en langage matriciel on a :

$$(II.2) \quad U = \varepsilon' \varepsilon = (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \Theta - \mathbf{X} \mathbf{B})' (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \Theta - \mathbf{X} \mathbf{B})$$

il faut que la quantité dU soit nulle pour toutes les variations des composantes des vecteurs Θ et $\mathbf{B}$; on doit donc résoudre le système suivant :

$$(II.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{\delta U}{\delta \Theta} = \mathbf{A}' (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \Theta - \mathbf{X} \mathbf{B}) = 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\delta U}{\delta \mathbf{B}} = \mathbf{X}' (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \Theta - \mathbf{X} \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right.$$

soit en développant :

$$(II.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}' \mathbf{A} \Theta + \mathbf{A}' \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{A}' \mathbf{Y} \\ \mathbf{X}' \mathbf{A} \Theta + \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{X}' \mathbf{Y} \end{array} \right.$$

Nous notons dès maintenant que la première des équations (II.4) est équivalente à t équations linéaires, la seconde à p . En outre, on peut remarquer que la matrice $\mathbf{X}' \mathbf{X}$ est une matrice ($p \times p$) dont l'élément i, j est :

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj}$$

(1) Choisir un plan d'expérience revient donc à choisir une matrice $\mathbf{A}$ pour que les paramètres des divers facteurs puissent être déterminés indépendamment. Cf. KEMPTHORNE (O.), op. cit., p. 59-65.

Si $i = j$, cet élément est égal à la somme des carrés des mesures du caractère i ; si $i \neq j$ il est égal à la somme des produits des mesures du caractère i par les mesures du caractère j . Il en est de même pour le vecteur $(p \times 1) \mathbf{X}'\mathbf{Y}$.

Pour résoudre ce système, il est logique d'introduire le vecteur $\mathbf{V}$ qui est la valeur de Θ lorsque tous les coefficients de régression sont nuls, soit donc :

$$(II.5) \quad \mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{A}'\mathbf{Y}$$

on en déduit immédiatement :

$$(II.6) \quad \Theta = \mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{B}$$

en posant :

$$(II.7) \quad \mathbf{W} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X} \quad (1)$$

La solution pour $\mathbf{B}$ est alors :

$$(II.8) \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{W})\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{V} \quad \text{soit :}$$

$$(II.8 \text{ bis}) \quad \mathbf{E}\mathbf{B} = \mathbf{Q}$$

Le coefficient de $\mathbf{B}$ au premier membre est la matrice résiduelle des carrés et des produits. Le vecteur $\mathbf{Q}$ est la somme résiduelle des produits de $\mathbf{Y}$ avec chacune des variables $\mathbf{X}$. On doit résoudre le système d'équations suivant :

$$(II.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccccccc} x_1^2 & & x_1x_2 & & x_1x_p & & x_1y \\ \text{QE} & b_1 & + & \text{PE} & b_2 & + \dots + & \text{PE} & b_p & = & \text{PE} & \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1x_2 & & x_2^2 & & x_2x_p & & x_2y \\ \text{PE} & b_1 & + & \text{QE} & b_2 & + \dots + & \text{PE} & b_p & = & \text{PE} & \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1x_p & & x_2x_p & & x_p^2 & & x_py \\ \text{PE} & b_1 & + & \text{PE} & b_2 & + \dots + & \text{QE} & b_p & = & \text{PE} & \end{array} \end{array} \right.$$

Les quantités $Q_E^{x_1^2}$ sont les sommes résiduelles des carrés et les $PE^{x_1x_j}$ les sommes résiduelles des produits qui sont calculées à la ligne erreur des tableaux d'analyse de variance (2).

Une fois connus les coefficients de régression, on calcule les valeurs des paramètres t_1 par (II.6).

(1) On peut voir que $\mathbf{W}$ a une interprétation simple : au caractère $\mathbf{Y}$ correspond un vecteur solution $\mathbf{V}$, aux p caractères représentés par la matrice $\mathbf{X}$ correspond une matrice solution $\mathbf{W}$.

(2) Le système des équations (II.9) n'est que la transcription de l'équation (II.8 bis). Nous employons ici les notations de VESSEREAU (A.), op. cit., p. 455. Dès maintenant nous remplaçons les quantités théoriques β par les valeurs estimées b suivant les conventions habituelles.

On calcule la somme résiduelle ajustée des carrés: c'est la variation totale de Y à laquelle on soustrait la part de la variation due aux traitements et celle due à la régression:

$$\begin{aligned}
 (II.10) \quad D_E^{\hat{y}^2} &= Y'Y - Y'A\Theta - Y'XB \\
 &= Y'Y - Y'AV - (Y'X - Y'AW)B \\
 &= Q_E^{\hat{y}^2} - b_1 \frac{x_1 y}{P_E} \dots b_2 \frac{x_2 y}{P_E} - \dots b_p \frac{x_p y}{P_E}
 \end{aligned}$$

II. 4 — Conditions d'application de l'analyse de covariance.

Nous avons fait, au moins d'une façon implicite, trois hypothèses dans la démonstration précédente. Pour pouvoir appliquer les résultats de cette démonstration, il faut que ces conditions soient vérifiées; nous avons admis:

a) qu'il existait un vecteur de B commun à tous les traitements. Cette affirmation n'est pas évidente et il peut être nécessaire de vérifier l'égalité des coefficients de régression partielle (1).

b) que les p caractères X n'étaient pas influencés par les traitements. On ne tient compte de ces caractères dans l'analyse que pour les éliminer; dans la formule (II,2) X est une valeur fixée qu'on n'ajuste pas à un modèle. On peut toutefois appliquer la méthode dans le cas où les variables à éliminer sont influencées par les traitements; mais il faut être très prudent dans l'interprétation. Cette hypothèse est sûrement vérifiée quand les variables à éliminer sont des variables étudiées avant l'application des traitements.

c) qu'il existait une variance commune autour de la droite ou du plan de régression; cette hypothèse peut être vérifiée en utilisant le test de Bartlett (2).

II. 5 — Les hypothèses à tester.

Elles sont au nombre trois.

II.5.1. *Intérêt de la régression globale:* s'il n'y avait aucune régression tous les coefficients β seraient nuls aux erreurs aléatoires près, il n'y aurait donc aucun gain à espérer en employant les p variables. Pour s'en assurer on teste l'hypothèse:

$$\beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_p = 0$$

Si elle est exacte la somme résiduelle des carrés $Q_E^{\hat{y}^2}$ ne diffère de $D_E^{\hat{y}^2}$ que par des variations d'échantillonnage.

(1) Cf. RAO (C.R.), op. cit., p. 112-115.

(2) Cf. VESSEREAU (A.), p. 157-158.

II.5.2 *Utilisation d'un nombre de variables inférieur à p*: on peut se demander si après avoir utilisé $p-1$ variables, il est utile de prendre encore la dernière. Si on veut voir l'utilité de la variable X_p on teste l'hypothèse

$$\beta_p = 0$$

Si cette hypothèse est exacte, on a pour calculer les autres β un système de rang $p-1$ dont les solutions sont $\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{p-1}$. La nouvelle somme résiduelle ajustée des carrés est de:

$$\hat{y}^2 = Q_E - b'_1 \frac{x_1 y}{P_E} - \dots - b'_{p-1} \frac{x_{p-1} y}{P_E}$$

La comparaison entre:

$$\frac{\hat{y}^2}{D'_E} \text{ et } \frac{\hat{y}^2}{D_E}$$

permet de vérifier l'hypothèse ci-dessus.

On peut résumer ces résultats dans le tableau II.5.1 suivant:

Origine de la variation	Somme des carrés	d.l.	Carré moyen	F
Régression en $x_1, x_2, \dots, x_p$	$b_1 \frac{x_1 y}{P_E} + \dots + b_p \frac{x_p y}{P_E}$	p		
Régression en $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$	$b'_1 \frac{x_1 y}{P_E} + \dots + b'_{p-1} \frac{x_{p-1} y}{P_E}$	p-1		
Apport de x_p après utilisation des p-1 premières	par différence	1	S^2_p	$\frac{S^2_p}{S_{y2}}$
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
Régression en $x_1, x_2, \dots, x_q$ ($q < p$)	$b''_1 \frac{x_1 y}{P_E} + \dots + b''_q \frac{x_q y}{P_E}$	q		
Apport de $x_{q+1}, \dots, x_p$ après utilisation des q premières	par différence	p-q	$S^2_{p-p-1} \dots p-q$	$\frac{S^2_{p1} \dots pq}{S_{y2}}$
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
Somme résiduelle ajustée	$y^2 - b_1 \frac{x_1 y}{P_E} - \dots - b_p \frac{x_p y}{P_E}$	nE	S_{y2}	

Tableau II.5.1. Test de l'effet des caractères concomitants.

11.5.3 *Test de l'effet des traitements*: Supposons qu'on désire tester l'hypothèse tous les θ_1 sont égaux. Dans ce cas, la somme des carrés vaut:

$$\hat{y}^2_{DE+T} = Q_E + Q_T - \sum_{k=1}^{k=p} \beta''_k \left(\frac{x_k y}{P_E} + \frac{x_k y}{P_T} \right)$$

Dans cette égalité, les β'' sont les solutions du système noté symboliquement $E + T$; la différence $\hat{y}^2_{DE+T} - \hat{y}^2_{DE}$ permet de calculer la somme des carrés traitement ajustée, et de tester l'hypothèse d'égalité des θ_1 .

II. 6 — Classement des traitements.

Comparaison des moyennes ajustées.

On appelle moyenne ajustée du traitement i et on note $\hat{y}_i$ la valeur qu'aurait eu $\bar{y}_i$ si les valeurs x avaient été les mêmes pour tous les traitements. On rapporte habituellement les valeurs y aux valeurs moyennes des x (1), on a alors

$$(II.11) \quad \hat{y}_i = \bar{y}_i - \sum_{k=1}^{k=p} b_k (\bar{x}_{ki} - \bar{x}_{ko})$$

où les quantités $\bar{x}_{ko}$ sont les moyennes des caractères x .

La différence entre deux moyennes ajustées est donc:

$$(II.12) \quad d_{ij} = |\hat{y}_i - \hat{y}_j| = |\bar{y}_i - \bar{y}_j - \sum_k b_k (\bar{x}_{ki} - \bar{x}_{kj})|$$

La variance de cette différence fait intervenir les valeurs des caractères concomitants, il est en général préférable d'avoir une valeur moyenne de la variance d'une moyenne ajustée; cette variance est calculée par la formule:

$$(II.13) \quad \overline{S_y^2} = \frac{S_y^2}{n} \left(1 + \frac{1}{t-1} \sum_{ij} c_{ij} \frac{x_i x_j}{Q_T} \right)$$

où

$\hat{S}_y^2$ est la variante résiduelle moyenne

$\frac{x_i x_j}{Q_T}$: les éléments de la matrice de la somme des carrés et des produits relative au facteur traitement

c_{ij} : les éléments de la matrice E^{-1}

t : le nombre de variantes du traitement à étudier

n : le nombre de mesures d'une variante.

(1) L'interprétation géométrique est simple: s'il existe une ligne moyenne de régression commune (cette ligne peut être une droite, un plan ou un hyperplan selon le nombre de variables concomitantes). On trace des parallèles à cette ligne par les points moyens de chaque variante des traitements: l'intersection de cette ligne avec la parallèle à Oy menée par le point moyen commun donne la valeur de la moyenne ajustée.

Dans le cas où on a une seule variable à éliminer la formule se simplifie et devient (1):

$$(II.14) \quad \overline{S_y^2} = \frac{S_y^2}{n} \left(1 + \frac{Q_{Tx^2}}{(t-1) Q_{Ex^2}} \right)$$

C'est l'écart type correspondant qu'on doit utiliser pour comparer les moyennes par le test de DUNCAN (2).

II. 7 — Gain apporté par l'analyse de covariance.

On chiffre ce gain en faisant le rapport de la variance avant ajustement à la variance après ajustement (3). C'est donc une quantité liée au coefficient de corrélation multiple qui mesure la fraction de la variance totale de Y qui peut être imputée à la liaison entre Y et les variables $X_1, X_2, \dots, X_p$.

III — EXEMPLES D'ANALYSES DE PLANS ORTHOGONAUX

III. 1 — Analyse à un seul facteur contrôlé.

(BOUVAREL (P.) et LEMOINE. Provenances d'épicéas T 357.
Dossier 63-54)

Pour comparer quatre provenances d'épicéas on voulait comparer le caractère: poids de cent graines. Ce poids n'est sûrement pas le même si les graines sont pleines ou vides; il est donc normal de tenir compte de ce facteur et de comparer les poids moyens de cent graines des quatre provenances en supposant qu'on les a toutes ramenées au même pourcentage de graines pleines. C'est ce dernier caractère qu'on désire donc éliminer (4).

Nous appelons:

X: la transformée du pourcentage par la transformation $\text{Arcsin } \sqrt{\%}$ (5)

Y: le poids de cent graines en mg.

L'analyse de covariance se fait alors en trois étapes.

III.1.1. *Calculs préliminaires:* ils sont indiqués au tableau III.1.1; on calcule les sommes des mesures pour X et pour Y, ainsi

(1) Cf. SNEDECOR (G.W.), op. cit., p. 444 et COCHRAN (W.T.) et COX (G.T.), op. cit., p. 79.

(2) Cf. RIVES (M.), op. cit., pour l'application de ce test plus sûr que le test de Student.

(3) Il ne faut pas oublier que le nombre de degré de liberté de la variance après ajustement est diminué de p. unités.

(4) Les quatre provenances appartiennent à deux régions différentes: la Haute-Savoie pour Morzine (MORZ) et Monriond (MONR); le Jura pour Mollunes (MOLU) et Premanon (PREM). Sur chaque provenance on a prélevé dix échantillons.

(5) Cette transformation est nécessaire pour stabiliser la variance des données exprimées en pourcentage.

que les sommes des carrés X^2 et Y^2 ; enfin les sommes des produits XY . On remplit alors sans aucune difficulté les colonnes (1) à (5), les lignes MORZ, MONR, MOLU, PREM et « totale » du tableau III.1.2. Par exemple pour

MORZ :	39 483,585	—	38 850,289	—	633,296
	369 630,67	—	364 194,19	—	5 436,48
	3 499 235,0	—	3 414 064,9	—	85 170,1
totale :	156 870,652	—	152 815,335	—	4 055,317
	etc...				

III.1.2 Hypothèses à vérifier: Les conditions nécessaires imposées au paragraphe II.4 sont:

a) *Existence d'un coefficient de régression unique:* puisqu'il n'y a qu'une variable à éliminer le vecteur **B** est un vecteur (1×1) donc un nombre. L'équation (II.8 bis) est donc très simple puisque:

$$3\,458,874\, b_1 = 28\,739,34$$

le résultat est donné en colonne (6). Nous avons aussi calculé les valeurs des coefficients de régression interne pour chaque provenance. L'hypothèse de l'égalité est assez vraisemblable, d'après la figure III.1.1., on peut le vérifier rigoureusement en calculant les variations résiduelles ajustées pour chaque provenance. La somme de ces quantités est inférieure à la variation résiduelle; la différence est une somme de carrés à trois degrés de liberté qui permet de tester l'hypothèse d'égalité. Ici, comme on pouvait le supposer, rien ne permet de contredire cette hypothèse.

b) *Le caractère concomitant n'est pas influencé par les traitements:* une analyse de variance sur le caractère X permet de l'affirmer.

c) *Les variances résiduelles internes sont égales:* un test de Bartlett sur les quatre carrés moyens de la colonne (10) permet de l'affirmer.

III.1.3 Analyse de covariance proprement dite: il suffit d'utiliser le tableau III.1.2 où sont déjà remplies les lignes et les colonnes utilisées au paragraphe précédent. La part de la variation résiduelle qui n'est due qu'à la régression se calcule à la ligne erreur par

$$b_1 P_E^{xy} = 8,3089 \times 28\,739,34 = 238\,792,3$$

Cette quantité soustraite à la variation résiduelle de Y avant ajustement permet de calculer la somme résiduelle ajustée des carrés $\hat{y}^2$
 $D_E = 197\,501,9$ et le carré moyen résiduel ajusté à 35 degrés de liberté. Pour tester l'hypothèse de l'égalité des moyennes du poids de 100 graines pour les quatre provenances, on effectue exactement les mêmes opérations que ci-dessus pour la quantité « Er-

reur + Entre traitements », qui correspond ici à la variation totale, on en déduit :

$$\hat{y}^2_{E+T} = 286\,081,7$$

La variation ajustée entre traitements est donc

$$\hat{y}^2_{E+T} - \hat{y}^2_E = 88\,579,8$$

L'hypothèse de l'égalité des moyennes $\bar{Y}$ ramenée à la même va-

leur de X est rejetée puisque $F = \frac{29\,526,60}{5\,642,91} = 5,23^{**}$ avec 3 et 35 degrés de liberté.

MORZINE		MONRIOND		MOLLUNES		PREMANON	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
62,72	591	66,42	530	36,87	250	68,03	590
71,56	731	59,34	500	52,53	395	49,02	380
60,00	554	72,54	641	68,03	514	67,87	628
73,57	590	61,34	570	30,66	200	73,57	499
66,42	686	53,73	583	60,67	450	71,56	510
48,45	508	69,73	607	64,90	670	69,73	443
62,03	557	64,90	470	44,43	350	65,65	590
50,77	378	66,42	680	51,35	360	54,94	460
58,05	628	70,63	766	73,57	440	56,17	432
69,73	620	66,42	640	70,63	673	66,42	452
$\Sigma x = 623,30$	$\Sigma y = 5843$	$\Sigma x = 651,47$	$\Sigma y = 5987$	$\Sigma x = 553,64$	$\Sigma y = 4302$	$\Sigma x = 643,96$	$\Sigma y = 4984$
Σx^2	39 483,585		42 730,524		32 591,762		42 064,781
$[\Sigma x]^2/10$	38 850,289		42 441,316		30 651,725		41 468,448
Σxy	369 630,67		392 265,22		255 792,06		324 406,26
$[\Sigma x \Sigma y]/10$	364 194,19		390 035,09		238 175,93		320 949,66
Σy^2	3 499 235,0		3 654 675,0		2 072 750,0		2 542 862,0
$[\Sigma y]^2/10$	3 414 064,9		3 584 416,9		1 850 720,4		2 484 025,6
Pour l'ensemble des mesures des quatre provenances : $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma x = 2\,472,37 \\ \bar{x} = 61,809 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma y = 21\,116 \\ \bar{y} = 527,90 \end{array} \right.$							
$\Sigma x^2 =$	156 870,652			$(\Sigma x)^2 : 40 =$	152 815,335		
$\Sigma xy =$	1 342 094,21			$(\Sigma x)(\Sigma y) : 40 =$	1 305 163,12		
$\Sigma y^2 =$	11 769 522,0			$(\Sigma y)^2 : 40 =$	11 147 136,4		

Tableau III.1.1 : Tableau des mesures et premiers calculs de l'étude du poids de 100 graines en mg ($\bar{Y}$) et du pourcentage de graines pleines après transformation en $\text{Arc. sin } \sqrt{\%}$ (X), pour quatre provenances d'épicéas.

Figure III.1.1: Relation entre le poids de 100 grains et le pourcentage de grains pleins (les quatre points moyens sont indiqués par des traits plus forts).

Figure III.1.2: Ajustement graphique du poids de 100 graines.

(1) Origine de la variation	(2) d. l.	(3) x^2	(4) xy	(5) y^2	(6) = $\frac{(4)}{(3)}$ $b_y x$	(7) = (6) × (4) Part de la régression	(8) = (5) - (7) Ecart par rapport à la régression	(9) d.l.	(8) 10 = $\frac{(8)}{(9)}$ Carré moyen
Morzine	9	633,296	5 436,48	85 170,1	8,5844	46 668,9	38 501,2	8	4 812,65
Monriond	9	289,208	2 230,13	70 258,1	7,7112	17 197,0	53 061,1	8	6 632,64
Mollunes	9	1 940,037	17 616,13	222 029,6	9,0803	159 959,7	62 069,9	8	7 758,74
Premanon	9	596,333	3 456,60	58 836,4	5,7964	20 035,0	38 800,6	8	4 850,08
							192 432,8 (5 069,1)	32 3	6 013,53 1 689,70
Erreur	36	3 458,874	28 739,34	436 294,2	8,3089	238 792,3	197 501,9	35	5 642,91
Entre traitements	3	(597,443)	(8 190,75)	(186 091,4)			(88 579,8)	3	29 526,60
Totale	39	4 055,317	36 930,09	622 385,6	9,1065	336 303,9	286 081,7	38	

Hypothèses qu'il est possible de tester d'après le tableau ci-dessus *avant analyse de covariance*:

- *Egalité des coefficients de régression*: exacte car la valeur de $F = \frac{3}{32} \frac{1 689,70}{6 013,53}$ n'est pas significative.
- *Egalité des variances résiduelles* de chaque provenance: par test de Bartlett sur les 4 variances (col. (10)) $\chi^2 = 1,07$ à 3 d.l. à une probabilité 0,80 d'être dépassée.
- *Le caractère X n'est pas influencé par les traitements*: $F = \frac{3}{36} \frac{(597,443):3}{(3 458,874):36} = \frac{199,15}{96,08} = 2,07$ NS

L'analyse de covariance proprement dite permet de tester l'égalité des moyennes ajustées Y

$$F = \frac{3}{35} \frac{29 526,60}{5 642,91} = 5,23^{**}$$

En outre, on peut faire le test global de la régression $F = \frac{1}{35} \frac{238 792,3}{5 642,91} = 42,32^{**}$

Tableau III.1.2. Analyse de covariance: Poids de 100 graines (Y) ajustés (les résultats entre parenthèses sont calculés par différence).

III.1.4 *Comparaison des moyennes*: on présente les calculs de la façon suivante:

(1) Provenance	(2) $\bar{x}_{10}$	(3) $\delta x_i = \bar{x}_{10} - \bar{x}_{00}$	(4) $b_1 \times \delta x_i$	(5) $\bar{y}_{10}$	(6) = (5) - (4) $\hat{y}_{10} = \bar{y}_{10} - b_1 \delta x_i$
MORZ	62,330	0,521	3,329	584,3	580,0
MONR	65,147	3,338	27,735	598,7	571,0
MOLU	55,364	- 6,445	- 53,551	430,2	483,8
PREM	64,396	2,587	21,495	498,4	476,9
Total		0,001	0,008		
Moyenne $\bar{x}_{00} = 61,809$			$\bar{y}_{00} = 527,9$		

Tableau III.1.3. Calcul des moyennes y ajustées ($b_1 = 8,3089$)

La représentation graphique de ce calcul est très simple sur les figures III.1.1 et III.1.2. Sur la première l'ensemble des trente-huit points a été transcrit (1). Sur la seconde seuls les points représentatifs des moyennes ont été indiqués: l'ajustement revient simplement à tracer des parallèles à la droite de régression résiduelle à partir des points moyens: la valeur de la moyenne ajustée se lit donc à l'intersection de ces droites avec la parallèle à l'axe Y menée par le point $X = 61,809$ (2). La comparaison des moyennes deux à deux s'effectue comme dans une analyse de variance classique. Pour pouvoir appliquer les résultats du test de Duncan, on calcule d'abord la variance moyenne ajustée de la moyenne d'un traitement

$$\overline{S\hat{y}_x} = \frac{5\,642,91}{10} \left(1 + \frac{597,443}{3 \times 3\,458,874} \right) = 579,865$$

soit un écart type $\overline{S\hat{y}_x} = 24,080$

(1) Deux des points représentatifs de la provenance MOLU n'ont pas été indiqués: le premier et le quatrième.

(2) L'analyse de la covariance revient donc à étudier les dispersions des points moyens par rapport à une droite résiduelle commune.

On en déduit les plus petites différences significatives (1) entre deux, trois ou quatre moyennes ajustées aux seuils 5 % et 1 %.

p	R(5%)	R(1%)
2	69,1	92,7
3	72,7	96,8
4	74,8	99,5

et enfin la comparaison des moyennes proprement dite :

i	Provenance	$\hat{y}_{10}$	$\hat{y}_{10} - \hat{y}_{40}$	$\hat{y}_{10} - \hat{y}_{30}$	$\hat{y}_{10} - \hat{y}_{20}$	$\hat{y}_{10} - \hat{y}_{10}$
1	MORZ	580,0	103,1**	96,2*	9,0	0
2	MONR	571,0	94,1*	87,2*	0	
3	MOLU	483,8	6,9	0		
4	PREM	476,9	0			

Tableau III.1.4. Comparaison des moyennes ajustées.

On voit donc qu'on peut établir les groupements suivants aux deux seuils choisis :

	MORZ	MONR	MOLU	PREM
5 %	_____	_____	_____	_____
1 %	_____	_____	_____	_____

III.1.5 Gain apporté par l'analyse de covariance : dans ce cas particulier la liaison étant forte entre les deux caractères, le gain est important en effet :

sans utiliser la régression, le carré résiduel vaut

$$S_y^2 = \frac{436\,294,2}{36} = 12\,119,28 \text{ à } 36 \text{ d.l.}$$

Après ajustement il vaut 5 642,91, soit un rapport 2,15 ou 215 %. Le gain apporté par cette analyse est sensiblement égal à celui qu'on aurait obtenu en doublant le nombre de mesures.

III. 2 — Analyse d'une expérience factorielle.

(ARBONNIER (P.) : étude de destruction de fougère par divers produits chimiques : forêt de Granvillers. Dossier 63.22)

Il s'agissait de comparer l'action de quatre produits chimiques sur la croissance de la fougère aigle (*Pteridium aquilinum*). Ces produits ont été utilisés à deux reprises pour qu'on puisse déceler une influence possible de la date d'application. En plus, un témoin était introduit dans l'expérience pour pouvoir comparer l'ensemble des

(1) Dans la littérature anglaise ces quantités sont appelées les *ranges*.

Traitement	Aminotriazol AM		Reglone RG		RA ₁		RA ₂		Témoin		
Date	J	S	J	S	J	S	J	S	J	S	
Echantillon n° 1	11 1 2	16 0 0	13 14 12	15 16 17	20 12 9	21 0 6	10 0 2	14 0 7	11 4 4	16 13 15	X Y Z
n° 2	20 0 0	18 0 0	10 9 11	14 4 4	21 16 14	13 4 9	14 0 2	18 0 6	19 12 8	14 7 10	X Y Z
n° 3	8 0 0	17 0 3	14 15 11	13 6 12	9 0 0	5 0 1	20 2 4	8 0 3	9 2 7	14 0 9	X Y Z
n° 4	15 0 0	24 0 5	17 8 13	7 1 5	20 4 10	12 1 12	29 1 2	22 0 6	13 2 5	13 0 4	X Y Z
n° 5	14 0 0	24 0 1	20 9 9	9 2 6	14 5 13	21 4 6	15 0 10	23 0 3	13 3 2	7 5 6	X Y Z
Total	68 1 2	99 0 9	74 55 56	58 29 44	84 37 51	73 9 34	88 3 20	85 0 25	65 23 36	64 25 44	X Y Z
Total par traitement	167 1 11		157 46 85		132 84 100		173 3 95		129 48 80		
<div> <div>Total par époque d'application pour les 4 produits →</div> <div> <div>J</div> <div>S</div> </div> <div>Total pour les 4 produits →</div> <div> <div>J+S</div> </div> </div>											
<div> <div>314</div> <div>315</div> <div>96</div> <div>38</div> <div>129</div> <div>112</div> <div>629</div> <div>134</div> <div>241</div> </div>											

758

182

321

↑

Total général

↓

758

182

321

Tableau III.2.1. Résultats de l'expérience de destruction de fougères en forêt de Granvilliers.

(1) Origine de la variation	(2) d.l.	(3) $\sum x^2$	(4) $\sum xz$	(5) $\sum z^2$	(6) = — (3) b_{xz}	(7) = (6) × (4) Part de la régression	(8) = (5) — (7) Ecart par rapport à la régression	(9) d.l.	(10) = — (9) Carré moyen	(11) F
A	1	63,85	— 44,63	31,21			50,52	1	50,52	3,82
T	1	0,10	— 0,80	6,40			6,75	1	6,75	—
P	3	98,07	— 173,03	485,07			530,38	3	176,79	13,36**
D	1	0,20	— 0,43	7,26			7,46	1	7,46	—
P × D	3	134,50	58,53	43,44			23,49	3	7,83	—
Erreur (E)	40	977,00	214,00	562,80	0,2190	46,87	515,93	39	13,23	
Totale	49	1 273,72	53,64	1 136,18						
E + A	41	1 040,85	169,37	594,01	0,1627	27,56	566,45			
E + T	41	977,10	213,20	569,20	0,2182	46,52	522,68			
E + P	43	1 075,07	40,97	1 047,87	0,381	1,56	1 046,31			
E + D	41	977,20	213,57	570,06	0,2186	46,67	523,39			
E + P × D	43	1 111,50	272,53	606,24	0,2452	66,82	539,42			

A: entre témoins et traitements; T: entre témoins; P: entre produits chimiques;

D: entre époques d'application; P × D: interaction produit × époques.

Tableau III.2.2. Analyse de covariance dans une expérience factorielle
(destruction de fougère en forêt de Granvilliers)

produits chimiques. Sur chaque surface attribuée à un traitement on a pris au hasard cinq surfaces unitaires et on a compté le nombre de crosses de fougères (1):

Avant traitement	X
Après traitement une première fois	Y
Après traitement une seconde fois	Z

Nous n'étudions pour l'instant que les caractères X et Z qui correspondent aux lignes 1 et 3 du tableau III.2.1 (2). A l'aide de ce tableau, on calcule sans difficulté les parts relatives à chaque variation dans l'analyse de covariance du tableau III.2.2: pour tous les calculs de l'analyse de covariance, il faut opérer comme dans une analyse de variance classique: il suffit de se souvenir que toutes les opérations sur les carrés d'une variable x_i sont remplacées par des opérations sur les produits des variables $x_i x_j$.

Comme au paragraphe précédent, on calcule le coefficient de régression résiduelle à la ligne erreur du tableau III.2.2. Pour tester l'action des divers traitements et l'interaction entre les produits chimiques et la date d'application, on fait les mêmes opérations que celles du paragraphe précédent sur l'unique test possible de l'expérience « traitement + erreur » (3). Le test des différents facteurs se trouve en colonne 11. On voit que seuls les produits chimiques ont des effets significativement différents (4).

Pour le calcul des moyennes ajustées, on présente les calculs comme au paragraphe III.1.4:

(1) Traitement	(2) $\bar{x}_{10}$	(3) $\delta x_1 = \bar{x}_{10} - x_{00}$	(4) $b_1 \cdot \delta x_1$	(5) $\bar{z}_{10}$	(6) = (5) - (4) $\hat{z}_{10} = \bar{z}_{10} - b_1 \delta x_1$
AM	16,700	0,975	0,214	1,100	9,886
RG	13,200	- 2,525	- 0,553	10,000	10,553
RA ₁	15,700	- 0,025	- 0,005	8,500	8,505
RA ₂	17,300	1,575	0,345	4,500	4,155
Total		0,000	0,001	24,100	24,099
Moyenne	15,725			6,025	

Tableau III.2.2. Calcul des moyennes z ajustées
(destruction de fougère en forêt de Granvilliers)

(1) Non comprises les crosses sèches.

(2) On peut s'assurer de la normalité de la distribution du nombre de crosses X par un test graphique: Cf. TOMASSONE (R.), op. cit. On trouve que rien ne s'oppose à admettre que le caractère X est distribué normalement avec une moyenne $m = 15,2$ et un écart type $s = 5,1$.

(3) Dans ce cas particulier on avait: « traitement + erreur » = variation totale. Ici la variation totale n'intervient plus directement.

(4) Il n'y a pas de différence entre le témoin et l'ensemble des traitements car la moyenne de ces derniers est sensiblement égale à celle du témoin: le réglone et RA₁ ont moins d'effet que le témoin.

Figure III.4.1: Evolution dans le temps du nombre de frondes de fougères sur des surfaces traitées par quatre produits chimiques (Destruction de fougère en forêt de Granvillers).

La variance d'une moyenne ajustée:

$$S_{\hat{z},x}^2 = \frac{13,23}{10} \left[1 + \frac{98,07}{3 \times 977,00} \right] = 1,6445$$

$$\overline{S_{\hat{z},x}} = 1,282$$

La comparaison de ces moyennes par le test de Duncan permet de faire les groupements suivants au seuil de probabilité 5 % :

AM	RA ₂	RA ₁	RG
(0,886)	(4,155)	(8,505)	(10,553)

Le gain apporté par l'analyse de covariance est ici $\frac{14,07}{13,23} = 1,06$
soit 106 %.

III. 3 — Analyse d'une expérience en blocs complets avec deux variables concomitantes.

(LANIER (L.): Etude de la réaction de *Pinus sylvestris* L. à *Lophodermium pinastri* (Schrad) Chev. après application de différents produits chimiques et anticryptogamiques. Dossier 63.20).

Cette expérience, implantée en forêt de Haguenau avec un dispositif en blocs complets comportant quatre répétitions, avait pour but de comparer l'effet de différents produits chimiques et anticryptogamiques (1). Dans chaque parcelle unitaire, cinquante plants ont été échantillonnés. On a mesuré sur chacun :

- la hauteur atteinte avant traitement en cm X₁
- l'intensité d'attaque avant traitement avec une note pouvant être 1, 2 ou 3, fonction de l'état sanitaire du plant (1 = sain, 2 = légèrement touché, 3 = très touché).
- l'intensité d'attaque après traitement avec la même notation Y

(1) Cette étude faite par M. LANIER en collaboration avec M. LEROY, ingénieur principal à Haguenau, n'est pas encore terminée. Les premiers résultats ne sont utilisés ici que pour illustrer une méthode et non pour tirer des conclusions d'ordre biologique.

BLOCS TRAITEMENTS	1	2	3	4	Total	Moyenne
1	73,08 2,72 1,98	72,76 2,10 1,76	66,78 2,28 1,76	59,80 2,24 1,98	272,42 9,34 7,48	68,105 2,335 1,870
2	78,34 2,82 2,16	72,84 2,46 1,64	69,24 2,34 2,08	67,28 2,06 1,64	287,70 9,68 7,52	71,925 2,420 1,880
3	63,16 2,44 1,98	70,36 2,08 1,84	49,90 2,60 2,14	74,40 2,24 1,86	257,82 9,36 7,82	64,455 2,340 1,955
4	81,12 2,16 1,68	59,26 2,36 2,06	63,82 2,46 2,16	64,24 9,84 2,04	268,44 9,84 7,94	67,110 2,460 1,985
5	74,58 2,54 2,08	68,44 1,94 2,16	58,50 2,56 2,38	76,04 2,56 1,98	277,56 9,60 8,60	69,390 2,400 2,150
6	65,04 2,30 2,24	62,06 1,86 1,90	61,94 2,04 2,12	62,06 2,08 2,02	251,10 8,28 8,28	62,775 2,070 2,070
Total	435,32 15,58 12,12	405,72 12,80 11,36	370,18 14,28 12,64	403,82 13,44 11,52	1 615,04 56,10 47,64	
Moyenne	72,55 2,59 2,02	67,62 2,13 1,89	61,69 2,38 2,10	67,30 2,24 1,92		67,293 2,338 1,985

Tableau III.3.1. Résultats de l'expérience sur *Lophodermium pinastri* (Schard) Chev.

	x_1	x_2	y	
Somme de tous les carrés et de tous les produits	109 911,1608	3 788,3824	3 191,6940	x_1
		132,7116	111,5596	x_2
			95,4248	y
Somme des carrés blocs	109 036,0075	3 781,5021	3 202,6899	x_1
		131,8547	111,5943	x_2
			94,7373	y
Somme des carrés traitements.	108 901,4740	3 781,9169	3 203,7239	x_1
		131,5229	111,2750	x_2
			94,8038	y
Centrage	108 681,4250	3 775,1558	3 205,1813	x_1
		131,1337	111,3351	x_2
			94,5257	y
Variation totale (S)	= Variation due aux blocs (S_B) +			
$\begin{bmatrix} 1\ 229,7358 & 13,2266 & -13,4873 \\ & 1,5779 & 0,2245 \\ & & 0,8991 \end{bmatrix}$	= $\begin{bmatrix} 354,5825 & 6,3463 & -2,4914 \\ & 0,7210 & 0,2592 \\ & & 0,2116 \end{bmatrix}$			
d.l. 23	= 3			
Variation due au traitement (S_T)	+ Variation résiduelle (S_E)			
$\begin{bmatrix} 220,0490 & 6,7611 & -14574 \\ & 0,3892 & -0,0601 \\ \hline & & 0,2781 \end{bmatrix}$	+ $\begin{bmatrix} 655,1043 & 0,1192 & -9,5385 \\ & 0,4677 & 0,0254 \\ \hline & & 0,4094 \end{bmatrix}$			
5	+ 15			

Tableau III.3.2 Analyse de covariance: y affecté par deux caractères
(Etude sur *Lophodermium pinastri* (Schrad) Chev.)

Toute l'analyse porte sur les moyennes des cinquante plants par parcelle unitaire qui sont indiquées au tableau III.3.1 (1).

Il est bon d'utiliser la notation matricielle dès qu'on a deux variables concomitantes à éliminer, la suite des calculs est grandement simplifiée. On a écrit au tableau III.3.2 l'égalité :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_T + \mathbf{S}_E$$

la matrice $\mathbf{E}$ de la formule (II.8 bis) est incluse dans la matrice $\mathbf{S}_E$ suivant :

$$\mathbf{S}_E = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \begin{matrix} -9,5385 \\ 0,0254 \\ 0,4094 \end{matrix} \end{array} \right]$$

Le calcul se fait sans difficulté supplémentaire.

III.3.1 *Calcul de la variance résiduelle ajustée*: l'équation (II.8 bis) $\mathbf{EB} = \mathbf{Q}$ se résoud par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}$$

c'est-à-dire avec les données de l'expérience :

$$(II.8 \text{ bis}) \quad \begin{bmatrix} 655,1043 & 0,1192 \\ 0,1192 & 0,4677 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,5385 \\ 0,0254 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00153 & -0,00039 \\ -0,00039 & 2,13822 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9,5385 \\ 0,0254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01460 \\ 0,05803 \end{bmatrix}$$

donc la somme des carrés due à la régression est :

$$\begin{aligned} b_1 P_E^{xy} + b_2 P_E^{zy} &= (-0,01460 \quad 0,05803) \begin{bmatrix} -9,5385 \\ 0,0254 \end{bmatrix} \\ &= 0,1407 \end{aligned}$$

(1) Une précision plus grande est obtenue en utilisant l'ensemble des mesures de tous les plants; mais dans ce cas on peut difficilement admettre que les variables X_2 et Y ont des distributions normales: pour la moyenne des cinquante plants le théorème de la loi forte des grands nombres permet d'affirmer que cette condition est plus sûrement réalisée.

Les coefficients de régression de Y en X_1 et de Y en X_2 sont (1)

$$b_1^* = \frac{-9,5385}{655,1043} = -0,01456$$

d'où la part due à la régression :

$$(-0,01456) \times (9,5385) = 0,1389$$

$$b_2^* = \frac{0,0254}{0,4677} = 0,05431$$

d'où la part due à la régression :

$$(0,05431) \times (0,0254) = 0,0014$$

On peut alors tester l'effet séparé des deux facteurs comme il est indiqué au tableau II.5.1. On voit que l'intensité d'attaque est

Origine de la variation	Somme des carrés	d.l.	Carré moyen	F
Régression en x_1 et x_2	0,1407	2	0,0704	3,40 NS
Régression en x_1 seul	0,1389	1		
Apport de x_2 après x_1	(0,0018)	1	0,0018	0,09 NS
Régression en x_2 seul	0,0019	1		
Apport de x_1 après x_2	(0,1393)	1	0,1393	6,73*
Erreur ajustée	(0,2687)	13	0,0207	
Erreur non ajustée	0,4094	15		

Tableau III.3. Test des effets de deux caractères concomitants.

beaucoup plus influencée par la hauteur initiale du plant que par son état sanitaire avant l'expérience (2).

(1) Dans la terminologie habituelle on devait écrire :

$$b_{y x_1, x_2} = b_1; b_{y x_2, x_1} = b_2; b_{y x_1} = b_1^*; b_{y x_2} = b_2^*$$

Pour ne pas alourdir le texte nous adoptons une notation plus simple qui, pour deux variables à éliminer, est sans ambiguïté.

(2) Ce résultat est déjà très intéressant par lui-même : s'il est confirmé on peut raisonnablement supposer que les spores qui portent l'infection se déplacent sur une faible hauteur au-dessus du niveau du sol.

III.3.2 *Test de l'effet des traitements*: on effectue les mêmes opérations sur la matrice $S_E + S_T$

$$S_E + S_T = \begin{bmatrix} 875,1533 & 6,8803 & -10,9959 \\ & 0,8569 & -0,0347 \\ & & 0,6875 \end{bmatrix}$$

On doit alors résoudre le système

$$E_{T+E} \quad B_{T+E}^{\circ} = Q_{T+E}$$

donc :

$$\begin{aligned} B_{T+E}^{\circ} = \begin{bmatrix} b_1^{\circ} \\ b_2^{\circ} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,00122 & -0,00979 \\ -0,00979 & 1,24561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10,9959 \\ -0,0347 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,01308 \\ 0,06443 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La somme des carrés due à la régression en faisant l'hypothèse que les traitements sont identiques est :

$$(-0,01308) \times (-10,9959) + (0,06443) \times (-0,0347) = 0,1416$$

On peut alors effectuer l'analyse de covariance proprement dite selon le modèle du tableau suivant :

(1) Origine de la variation	(2) Somme des carrés non ajustés	(3) Part de la régression	(4) = (2) — (3) Écart par rapport à la régression	(5) d.l.	(6) = (4) : (5) Carré moyen	(7) F
Erreur E	0,4094	0,1407	0,2687	13		
Traitement + Erreur E + T	0,6875	0,1416	0,5459	18	0,0207	
Traitement ajusté			(0,2772)	5	0,0554	2,68

Tableau III.3.4: Analyse de covariance: test de l'effet des traitements.
[Etude sur *Lophodermium pinastri* (Schrad) Chev.]

La valeur de F correspond à une probabilité d'être dépassée de 10 %.

Traitements	$\bar{x}_{10}$	δx_1	$b_1 \delta x_1$	$\bar{x}_{20}$	δx_2	$b_2 \delta x_2$	$\bar{y}_{10}$	$\hat{y}_{10} = \bar{y}_{10} - b_1 \delta x_1 - b_2 \delta x_2$
1	68,105	0,812	— 0,012	2,335	— 0,003	— 0,000	1,870	1,882
2	71,920	4,632	— 0,068	2,420	0,082	0,005	1,880	1,943
3	64,455	— 2,838	0,041	2,340	0,002	0,000	1,955	1,914
4	67,110	— 0,183	0,003	2,460	0,122	0,007	1,985	1,975
5	69,390	2,097	— 0,031	2,400	0,062	0,004	2,150	2,177
6	62,775	— 4,518	0,066	2,070	— 0,268	— 0,016	2,070	2,020
Total		0,002	— 0,001		— 0,003	0,000		
Moyenne	67,293			2,338			1,990	1,990

Tableau III.3.5: Calcul des moyennes ajustées. [Etude sur *Lophodermium pinastri* (Schrad) Chev.]

La variance d'une moyenne ajustée est par application de la formule (III.13):

$$\bar{S}_{\hat{y}_2} = \frac{0,0207}{4} \left[1 + \frac{1}{5} (0,00153 \times 220,0490 - 2 \times 0,00039 \times 6,7611 + 2,13822 \times 0,3892) \right] \\ = 0,00638$$

donc :

$$\bar{S}_{\hat{y}} = 0,080$$

Le calcul des moyennes ajustées s'effectue comme aux paragraphes précédents (Tableau III.3.5.).

Au seuil de probabilité 10 % on peut établir les groupements suivants (1):

Traitements	1	3	2	4	6	5
$\hat{z}_{10}$	(1,88)	(1,91)	(1,94)	(1,98)	(2,02)	(2,18)

Le gain apporté par l'analyse de covariance est ici $\frac{0,0273}{0,0207} = 1,32$
soit 132 %.

III. 4 — Un des caractères concomitants est influencé par les traitements.

Nous avons vu ci-dessus qu'il n'était pas possible d'appliquer l'analyse de covariance rigoureusement; si on veut tout de même essayer d'appliquer les résultats énoncés plus haut, il faut être extrêmement prudent dans les conclusions (2).

Nous reprenons l'exemple étudié en III.2 de l'essai de destruction de fougère, et nous utilisons la mesure intermédiaire notée Y; nous n'utilisons que les matrices S_E et S_P et nous n'étudions que l'action des produits chimiques.

(1) Comme nous ne possédons pas de table du test de Duncan pour le seuil 10 % on a simplement utilisé un test t de Student qui correspond à la plus petite différence significative de 0,20.

(2) Cf. COCHRAN (W.G.), and COX (G.M.), op. cit., p. 82-83.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S_P} &= \begin{bmatrix} 98,07 & -207,55 & -173,03 \\ & 463,30 & 438,25 \\ & & 485,07 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{S_E} = \begin{bmatrix} 977,00 & 258,20 & 214,00 \\ & 564,00 & 364,20 \\ & & 562,80 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S_E} + \mathbf{S_P} &= \begin{bmatrix} 1\,075,07 & 50,65 & 40,97 \\ & 1\,033,30 & 652,25 \\ & & 1\,047,87 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tableau III.4.1: Matrices de dispersion nécessaires pour étudier l'effet des produits chimiques par analyse de covariance (Destruction de fougère en forêt de Granvillers).

Comme au paragraphe précédent nous calculons :

— pour la sous-matrice de $\mathbf{S_E}$, le vecteur $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 = 0,0084 \\ b_2 = 0,6309 \end{bmatrix} \quad (1)$

— pour la sous-matrice de $\mathbf{S_E} + \mathbf{S_P}$ le vecteur $\mathbf{B}_{T+E}^* = \begin{bmatrix} b_1^* = 0,0550 \\ b_2^* = 0,6205 \end{bmatrix}$

On peut alors faire l'analyse de covariance :

(1) Origine de la variation	(2) Somme des carrés non ajustée	(3) Part de la régression	(4) = (2) — (3) Ecart par rapport à la régression	(5) d.l.	(6) = (4) : (5) Carré moyen	(7) F
Erreur E	562,80	237,76	325,04	38	8,55	
Traitement + Erreur E + T	1 047,87	411,85	636,02	41		
Traitement ajusté			310,98	3	103,56	12,11**

Tableau III.4.2: Analyse de covariance: test de l'effet des traitements (Destruction de fougère en forêt de Granvillers).

(1) Les matrices $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}^{-1}$ ont pour expression :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 977,00 & 258,20 \\ 258,20 & 564,00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0011644 & -0,0005330 \\ -0,0005330 & 0,0020171 \end{bmatrix}$$

Produits	$\bar{x}_{10}$	δx	$b_1 \delta x$	$\bar{y}_{10}$	δy	$b_2 \delta y$	$\bar{z}_{10}$	$\bar{z}_{10} = \bar{z}_{10} - b_1 \delta x - b_2 \delta y$
AM	16,700	0,975	0,054	0,100	— 3,250	— 2,017	1,100	3,063
RG	13,200	— 2,525	— 0,139	8,400	5,050	3,134	10,000	7,725
RA ₁	15,700	— 0,025	— 0,001	4,600	1,250	0,776	8,500	6,306
RA ₂	17,300	1,575	0,087	0,300	— 3,050	— 1,893	4,500	7,005
Total		0,000	0,001		0,000	0,000		
Moyenne	15,725						6,025	6,025

Tableau III.4.3: Calcul des moyennes ajustées (Destruction de fougère en forêt de Granvillers).

L'analyse de covariance aboutit à un test significatif ; il s'agit de savoir pour pouvoir interpréter ce résultat ce qui résulte de l'élimination des deux variables concomitantes :

— l'élimination de X n'apporte rien de plus qu'à la première analyse.

— en étudiant Y on étudie l'effet plus ou moins durable des produits chimiques dans le temps. On peut donc après ajustement des moyennes Z trouver un sens aux différences remarquées.

La variance moyenne d'une moyenne ajustée est :

$$S_{\hat{z}_2} = \frac{8,55}{10} \left[1 + \frac{1}{3} (98,07 \times 0,0011644 + 2 \times 207,55 \times 0,0005330 + 469,30 \times 0,0020171) \right]$$

$$= 1,2204$$

$$S_{\hat{z}} = 1,105$$

Nous voyons qu'il existe un groupement simple : d'un côté AM, de l'autre RG, RA₁ et RA₂. Nous pouvons conclure que l'effet de AM paraît beaucoup plus durable que celui des autres produits. Ce résultat pouvait être prévu d'après la représentation schématisée de la figure III.4.1 : la progression entre Z et Y est moins rapide pour AM que pour les trois autres produits.

$$\text{Le gain est ici de } \frac{14,07}{8,55} = 1,65, \text{ donc } 65 \ \%.$$

III. 5 — Autres analyses classiques.

III.5.1 Dispositifs orthogonaux équilibrés : c'est le cas des expériences factorielles en carré latin ; l'analyse ne pose pas de difficultés nouvelles. On calcule toujours la sous-matrice **E** de **S_E**, puis le vecteur **B**, c'est-à-dire les valeurs des coefficients de régression de Y en X₁, X₂, ... X_p et enfin la somme résiduelle ajustée des carrés. Pour le test d'ensemble de l'égalité des niveaux d'un traitement on effectue les mêmes opérations sur **E_{T+E}**.

III.5.2 Cas où il existe deux types d'erreur : ce cas est un peu plus délicat et il se présente, par exemple, dans l'interprétation d'un dispositif en « split-plot ». On doit alors calculer deux vecteurs régression : un pour chaque type d'erreur ; d'où deux erreurs ajustées de façon différente. On peut alors effectuer l'analyse de covariance comme il est indiqué au tableau III.5.1. Le calcul des variances moyennes est alors beaucoup plus délicat (1).

(1) Cf. RAMACHANDRAN (G.), op. cit.

Origine de la variation	Somme des carrés	Somme des carrés ajustée	d.l.	Carré moyen ajusté	F
Blocs Traitements: T Erreur (a)	Q _B Q _T Q _{E_a}	$D^2_{T+a} - D^2_a$ D^2_a	$t-1$ n_a-p	$\bar{S}^2_T$ $\bar{S}^2_a$	$\bar{S}^2_T/\bar{S}^2_a$
T + Erreur (a)		D^2_{T+a}			
Variétés: V Interaction T×V Erreur (b)	Q _V Q _{TXV} Q _{E_b}	$D^2_{v+b} - D^2_b$ $D^2_{TXV+b} - D^2_b$ D^2_b	$v-1$ $(t-1)(v-1)$ n_b-p	$\bar{S}^2_V$ $\bar{S}^2_{TXV}$ $\bar{S}^2_b$	$\bar{S}^2_V/\bar{S}^2_b$ $\bar{S}^2_{TXV}/\bar{S}^2_b$
V+Erreur (b) T×V+Erreur (b)		D^2_{v+b} D^2_{TXV+b}			
Totale	Q				

Tableau III.5.1: Analyse de covariance d'un dispositif en « split-plot » simple.

III.5.3 Dispositifs en blocs incomplets: l'interprétation se complique encore selon le modèle d'interprétation choisi (1). Si on utilise l'information entre blocs la non orthogonalité du dispositif entraîne un grand nombre de difficultés; en particulier la variance d'une moyenne d'un traitement n'est pas de la forme indiquée en (II.13) mais elle comprend deux termes nouveaux: le carré moyen Blocs-Traitements éliminés et le carré moyen intra-blocs aussi bien pour le caractère à étudier que pour ceux qu'on se propose d'éliminer (2).

IV — EXTENSION DE L'ANALYSE DE COVARIANCE A DES PROBLEMES PARTICULIERS

IV. 1 — Dispositifs non orthogonaux.

Dans des dispositifs de ce type à deux facteurs contrôlés on ne peut pas interpréter l'effet d'un traitement indépendamment de l'effet d'un autre traitement. Ces cas sont tellement fréquents dans

(1) Dans un dispositif en blocs incomplets équilibrés deux modèles d'interprétation sont possibles: si on considère que la variabilité entre bloc est déterminée, les quantités représentant l'effet des blocs sont fixées; si on veut tenir compte de l'information entre blocs on doit supposer que ces mêmes quantités sont des variables aléatoires distribuées normalement. Cf. VESSEREAU (A.), op. cit., p. 359-404.

(2) Pour plus de détails sur l'interprétation, cf. FEDERER (W.T.), op. cit., p. 498-509.

l'interprétation des dispositifs classiques qu'il faut les étudier malgré l'inconvénient que présente leur interprétation. Dans le cas d'un dispositif en blocs complets sans interaction un modèle a été proposé (1) : il fait intervenir la matrice de variance-covariance des paramètres des traitements. Cette dernière se calcule simplement à partir du tableau du nombre de mesures par parcelle unitaire (n_{ij}) et permet de calculer la somme des carrés traitement. A partir de ce point, on peut sans difficulté supplémentaire appliquer la méthode expliquée ci-dessus, avec les mêmes réserves que pour l'analyse des dispositifs en blocs incomplets (2).

IV. 2 — Etude du rapport de deux variables.

On veut quelquefois étudier le rapport de deux variables dans le but d'éliminer une d'entre elles. Si au préalable on a fait une analyse de variance sur les deux facteurs, on a implicitement supposé que chacune était distribuée normalement ; il est donc très dangereux de faire une analyse de variance sur le rapport car la nouvelle variable n'est absolument pas une variable normale (3). La seule solution simple consiste à faire une analyse de covariance en prenant comme variable indépendance la variable que l'on veut éliminer.

IV. 3 — Cas où il existe un gradient de variation.

Malgré toutes les précautions, il se peut qu'une unité de comparaison ne soit pas rigoureusement homogène, mais qu'il existe une variation indépendante des traitements, on peut essayer dans ce cas d'éliminer la variation qui s'est introduite par analyse de covariance : il suffit d'associer au caractère mesuré une variable dont les valeurs successives sont 1, 2, 3, ... correspondant à la position dans l'unité de comparaison (4). On peut même associer une variable plus compliquée qui ne varie pas de façon linéaire, mais comme les carrés des entiers 1, 4, 9, ... Dans tous les cas, il est bon d'avoir un graphique sur lequel on porte les points représentatifs en fonction de la distance pour avoir au moins une idée du gradient de variation. Pour des expériences biologiques courantes dans lesquelles les variations proviennent de différences de fertilité une variable variant linéairement suffit largement.

(1) Cf. TOCHER (K.D.), op. cit.

(2) Quand le dispositif n'est vraiment plus interprétable de façon simple, il vaut mieux, dans la majorité des cas, se ramener à une étude de régression.

(3) La loi du rapport de deux variables normales de même moyenne et de même variance est une loi compliquée. Pour certaines valeurs des paramètres c'est une loi de Cauchy. Cf. AGARD (J.), op. cit.

(4) La variable concomitante à éliminer est donc simplement la distance à une origine fixée.

IV. 4 — Composantes de la variation.

L'analyse de variance permet de calculer explicitement les diverses variances correspondant aux facteurs contrôlés : par exemple, si on compare plusieurs provenances d'arbres composées chacune de plusieurs arbres, l'analyse de variance permet de se rendre compte s'il existe des différences entre provenances. Mais on peut avoir des renseignements supplémentaires en calculant les variances entre provenances, entre arbres au sein des provenances (1). Les calculs sont simples dans les dispositifs orthogonalisés, il suffit de savoir quelle est la valeur estimée par un carré moyen qui correspond à une certaine variation. Ces calculs sont aussi possibles en analyse de covariance. Par exemple dans le dispositif à un facteur contrôlé avec une seule variable concomitante :

Se^2 = variance résiduelle ajustée

St^2 = variance entre provenances =

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{Q_T^{yz} - b_T Q_T^{ys}}{t - 2} - \frac{Q_E^{yz} - b_E Q_E^{yy}}{tn - t - 1} \right]$$

où b_E est le coefficient de régression résiduelle et b_T le coefficient de régression calculé à la ligne traitement dans l'analyse de covariance, n est le nombre de mesures par traitement et t le nombre de niveaux de traitements à comparer.

Par exemple dans l'expérience étudiée en III.1, on a :

$$S_E^2 = 5642,91$$

$$S_T^2 = 3125,64$$

IV. 5 — Estimation de données manquantes.

Il arrive que dans une expérience certaines données manquent, il est possible de les estimer par la méthode des moindres carrés, tous les ouvrages classiques de statistiques appliquées donnent l'expression dans le cas d'une donnée manquante (2). Il est possible de calculer ces valeurs en utilisant l'artifice de l'analyse de covariance : à chaque donnée manquante on associe une variable x prenant la valeur 1 si la donnée manque et 0 dans le cas contraire. Pour p données manquantes, on a donc p variables indépendantes prenant une des deux valeurs 0 ou 1 (3). On considère que la valeur de y cor-

(1) Ce calcul peut être intéressant pour des études de variation en génétique. Pour le calcul de ces variances dans d'autres plans d'expérience cf. FEDERER (W.T.), op. cit., p. 518-522.

(2) Cf. VESSEREAU (A.), op. cit., p. 239-240.

(3) On appelle la variable x une variable indicatrice.

respondant à la donnée manquante est nulle. On calcule donc un vecteur **B**, et les valeurs de y ajustées sont les valeurs

$$(4.1) \quad \hat{y} = y_o - \sum_k b_k (x_k - x_{ok})$$

avec $y_o = 0$; comme on ramène tout aux valeurs $x_{ok} = 0$ et comme $x_k = 1$ par définition, on a :

$$(4.2) \quad y = - \sum_{k=1}^{k=p} b_k$$

Il faut noter qu'on ne trouve pas d'autres équations que celles qu'on aurait obtenu en égalant à zéro les dérivés de la variance résiduelle U par rapport aux paramètres que l'on veut estimer, mais ces équations sont obtenues facilement (1).

(1) A ce sujet cf. FEDERER (W.T.), op. cit., p. 509-510.

BIBLIOGRAPHIE

- AGARD (J.). — Mélange de deux populations normales et étude de quelques fonctions de variables normales x, y . *Revue de Statistiques appliquées*, IX, 4, 1964, p. 53-70.
- COCHRAN (W.-G.), and COX (G.-M.). — *Experimental Designs*, John Wiley, New York, 1953.
- DEMPSTER (P.-A.). — Stepwise multivariate analysis of variance based on principal variables, *Biometrics*, 19, 3, 1963, p. 478-490.
- DUGUÉ (D.). — *Traité de Statistique théorique et appliquée*, Masson, Paris, 1958.
- FEDERER (W.-T.). — *Experimental Design. Theory and Application*, Mac Millan, New York, 1963.
- KEMPTHORNE (O.). — *The design and analysis of experiments*, John Wiley, New York, 1962.
- KENDALL (M.-G.) and STUART (A.). — *The advanced theory of statistics*. Vol. 2. Griffin. Londres, 1961.
- MACKENZIE (A.-M.). — The effect of thinning treatment on growth. *Forestry*, XXXV, 2, 1962, p. 129-138.
- MONJALLO (A.). — *Initiation au calcul matriciel*. Vuibert, Paris, 3^e éd., 1961.
- RAMACHANDRAN (G.). — Analysis of covariance for the Split-plot Design average variances, *Biometrics*, 20, 1, 1964, p. 204-206.
- RAO (C.-R.). — *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*. John Wiley. New-York, 1962.
- RIVES (M.). — Sur la comparaison des moyennes dans les essais variétaux. *Annales de l'Amélioration des plantes*, 9, 3, 1959, p. 357-376.
- SNEDECOR (G.-W.). — *Statistical methods*. The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 5^e éd, 1956.
- TOCHER (K.-D.). — The design and analysis of block experiments. *JRSS B* XIV, 1952, p. 45-100.
- TOMASSONE (R.). — Méthode graphique de calculs de la moyenne et de l'écart type d'une distribution normale. Test de normalité. *R.F.F.*, 10, 1963, p. 791-797.
- TOMASSONE (R.). — Application des fonctions discriminantes à des problèmes biométriques. *Ann. E.N.E.F.*, XX, 4, 1963, p. 580-617.
- VESSEREAU (A.). — *Méthodes statistiques en biologie et en agronomie*. Bailière. Paris, 1961.
- VIGNAL (J.). — *Calcul matriciel*. Vuibert, Paris, 1961.
- WISHART (J.). — *Field Trials II. The Analysis of Covariance*. Commonwealth Bureau of Plant Breeding and Genetics. Cambridge, 1950.

RÉSUMÉ

Toutes les précautions prises et malgré tous les soins apportés, il n'est pas toujours possible dans la mise en place d'un dispositif expérimental de tenir compte de tous les facteurs susceptibles d'influencer le caractère étudié; la comparaison des « traitements » peut donc être faussée. L'analyse de covariance dont l'objet est de tenir compte de ces facteurs, permet d'éviter ce genre d'erreur.

Nous donnons d'abord un aperçu théorique de la méthode dans la notation matricielle, afin d'en indiquer les points délicats et les conditions exactes d'application. Nous étudions les différents tests d'hypothèses.

Ces résultats théoriques sont appliqués à des exemples d'expérimentation forestière; analyse à un facteur contrôlé, analyse factorielle, dispositif en blocs complets avec deux caractères à éliminer. Nous examinons ensuite le cas délicat où un des facteurs est influencé par les traitements.

Par ailleurs, nous rattachons le problème de l'estimation des données manquantes à celui de l'analyse de covariance, ce qui permet de donner une résolution rapide à cette question.

SUMMARY

Whatever the precautions taken and the care exercised in the setting up of experimental designs, it is not always possible to take into account all the factors likely to affect the characteristic studied; the comparison of « treatments » may therefore be distorted. Covariance analysis the object of which is to take these factors into account, helps to avoid this type of error.

First a theoretical account of the method is given in regard to matricial notation to indicate the critical points and precise conditions of its application. Various assumptive tests have been studied.

These theoretical results have been applied to forest experiments; analysis with one controled factor, factorial analysis, complete-block design with elimination of two characteristics. Then, the difficult case when one factor is affected by treatments has been examined.

Besides, the problem of missing data estimation is related to that of covariance analysis, which makes possible a rapid solution of this point.

ZUSAMMENFASSUNG

Trotz aller ergriffenen Massnahmen und höchst zuständiger Sorgfalt, ist es nicht immer möglich in der Zusammenstellung einer Versuchsanlage, Rechnung aller Faktoren, die den ergänzten Charakter beeinflussen, zu tragen; der Vergleich der « Pflegetechnik » kann also gefälscht werden. Die Analysis der « covariance », deren Grund die Berücksichtigung dieser Faktoren ist, gibt Gelegenheit dieses Irrtum zu vermeiden.

Wir stellen zuerst einen theoretischen Ueberblick der Matrizenbezeichnung, dar, dies im die misslichen Stellen und die genauen Anwendungsformen zu vermerken. Die verschiedene Testhypothesen werden ergründet.

Diese theoretische Ergebnisse sind beispielweise an Forstexperimenten angewendet; Analysis an einem kontrollierten Faktor, Faktorenanalysis, Zuteilung in vollständigen Teilen mit zwei auszuschneidenten Charakteren. Wir ergründen dann der misslichen Fall wobei einer der Faktoren durch die Pflegetechnik beeinflusst ist.

Anderswo, verbinden wir das Problem der Abschätzung der Fehlangaben mit dem der Covarianceanalysis, Verfahren das eine rasche Lösung dieses Falls gestattet.