L'ANALYSE DE L'INFORMATION

**Aperçu théorique
et application à la loi multinomiale**

PAR

P. ARBONNIER

Directeur de la Station de Biométrie du C.N.R.F.

INTRODUCTION

Les difficultés que suscite l'interprétation des résultats d'un certain nombre d'expériences entreprises par le Laboratoire de Recherches sur le Désherbage ont amené la Station de Biométrie du C.N.R.F. à étudier de plus près les problèmes que pose l'analyse de données recueillies sous forme de notation. L'expérimentation des herbicides en sylviculture a souvent pour objectif la recherche de traitements de contrôle — et non de destruction — des espèces adventices forestières: elle exige par conséquent l'appréciation de l'intensité des dommages causés par l'application d'un produit toxique plutôt que la seule observation de la mortalité provoquée. Dans ces conditions, il est impossible d'apprécier l'effet d'un produit autrement que par une notation conventionnelle dont la définition demeure, pour le moment, du ressort de chaque expérimentateur.

L'appréciation par notation n'est pas réservée à cette discipline: de nombreux caractères concernant des arbres ou des plants forestiers ne peuvent être appréciés par une donnée quantitative. Le problème de l'interprétation de résultats d'expériences observés qualitativement intéresse donc l'ensemble de la recherche forestière et, au delà, la recherche agronomique toute entière.

Les difficultés suscitées par l'analyse de données conventionnelles chiffrées sont de plusieurs ordres et contribuent à rendre l'analyse de variance dangereuse ou inopérante. Cette analyse est en effet assortie de conditions dont plusieurs sont, dans ce cas, difficilement satisfaites. Dans tout modèle, même le plus simple tel que:

$$x_{ij} = \mu + \theta_i + \varepsilon_{ij}$$

l'analyse de variance exige:

- 1 — que l'erreur ε_{ij} soit une variable normale centrée;
- 2 — que les ε_{ij} soient indépendants entre eux;
- 3 — que la variance des ε_{ij} soit constante quels que soient i et j ;
- 4 — lorsqu'interviennent plusieurs causes contrôlées, on admet en outre l'additivité des effets.

Dans tout système de notations, la variable que constitue la note est une variable discrète qui ne prend que quelques valeurs entières, au plus une dizaine dans la pratique courante. Les hypothèses 1 et 4 sont alors pour le moins difficilement admissibles. L'hypothèse

3 d'homoscédasticité des erreurs peut être contrôlée, par exemple par un test de BARTLETT (encore que ce test soit très sensible à l'absence de normalité). On constate le plus souvent que les variances ne sont pas homogènes.

Il existe encore une ressource; le changement de variables. Ce problème a déjà fait l'objet de nombreuses mises au point [BURGHAUSEN (2), RIVES (9)]. On suggère généralement la transformation $\arcsin \sqrt{x}$ mais bien d'autres ont été proposées depuis les classiques $\log x$, $\sqrt{x}$ ou $\sqrt{x+1}$ jusqu'aux scores de FISHER et YATES (5) et des expressions aussi compliquées que:

$$x' = \text{Probit} \frac{\log(x+1)}{\log(a_2+1-a_1)} \quad (a_2 \text{ et } a_1: \text{notes extrêmes})$$

Le choix d'une variable transformée est largement facilité par un graphique préalable: DAGNELIE (3), JEFFERS (6).

Le changement de variable est parfois une solution acceptable, notamment pour les transformations que nous avons qualifiées de classiques, souvent prévues dans les programmes de calculs d'analyse de variance sur calculatrices électroniques, mais l'interprétation des résultats ne s'en trouve pas pour autant facilitée. Enfin, dans certains cas, les chiffres se montrent rebelles à toute transformation: tel est le cas de ceux qui figurent sur le tableau 0.1 qui rassemble les résultats d'une expérimentation de 2.4.5-T pour l'élagage des gourmands de chêne.

Dans une forêt haut-marnaise, une parcelle a été divisée en trois lots et, dans chaque lot, on a choisi 40 chênes couverts de gourmands. Trois traitements, attribués au hasard à chaque lot, ont été appliqués, fin juillet 1962, aux gourmands accessibles aux appareils:

- T1 — une pulvérisation classique à 0,15 % éq. ac. 2.4.5-T,
- T2 — une pulvérisation classique à 0,25 % » »
- T3 — une pulvérisation pneumatique à 1,5 % » »

Les résultats ont été observés en 1964 en attribuant à chaque arbre traité, une note conventionnelle de 0 (gourmands totalement détruits) à 6 (gourmands intacts).

Traitement	0	1	2	3	4	5	6	
T1	0	0	1	2	20	17	0	40
T2	1	0	0	2	13	23	1	40
T3	2	2	5	6	17	8	0	40
Total	3	2	6	10	50	48	1	120

Tableau 0.1 — Résultats: élagage chêne 1962-1964

Sur cet exemple, aucune transformation, parmi toutes celles qui ont été suggérées par de multiples auteurs, n'a pu homogénéiser les variances. On verra plus loin que l'analyse de l'information permet l'interprétation des résultats de ce tableau.

Lorsque l'interprétation se heurte ainsi à l'impossibilité de mettre en œuvre toutes les ressources de l'analyse de variance, on doit alors penser à utiliser la méthode fondée sur le test χ^2 qui utilise les mêmes propriétés d'additivité des estimations et des degrés de liberté. Cette méthode n'est pas tellement simple lorsqu'on veut faire les calculs à la main. Elle nécessite en outre certaines précautions: si les effectifs des cases sont trop faibles, on peut être amené à des regroupements qui, parfois, sont factices et entraînent toujours une perte d'information.

Il existe une méthode beaucoup plus générale d'analyse de données statistiques, qui s'apparente encore du point de vue formel, à l'analyse de variance sans qu'elle implique les mêmes restrictions concernant les lois de distribution des erreurs. Elle dérive de la théorie de l'information et son application à la loi multinomiale est extrêmement féconde. Récemment signalée par DUFRENOY (4), elle est peu connue des chercheurs qui, dans le domaine agronomique autant que dans le domaine forestier, y trouveraient souvent la solution du problème difficile que pose l'interprétation d'un ensemble d'observations par « notation ».

La théorie de l'information et ses applications sont exposées dans des ouvrages sévères susceptibles de dérouter et de rebuter les chercheurs qui ne sont pas déjà spécialisés en statistique. Plusieurs d'entre eux nous ont demandé d'exposer — sous une forme condensée et qui demeure à leur portée — certaines possibilités offertes à leur discipline par l'analyse de l'information. Tel est le but de cet article qui résulte de l'analyse de différentes sources mais qui se réfère le plus souvent à l'ouvrage très complet, mais touffu, que KULLBACK (8) a consacré à la théorie de l'information et à ses applications en statistique. Il s'inscrit dans le cadre de la mission d'éducation statistique permanente qui constitue une des tâches essentielles de toute station de Biométrie et conditionne son efficacité.

Une première partie est consacrée à un aperçu théorique sur l'information: définition, propriétés, estimation de l'information minima de discrimination. C'est une entreprise difficile que certains jugeront abusive et d'autres — du moins nous l'espérons — trop sommaire et schématique. Cependant, il était imprudent de développer les applications de l'analyse de l'information au cas des distributions multinomiales en les présentant comme de simples « recettes de cuisine »: les statisticiens connaissent bien les erreurs d'interprétation qui peuvent résulter d'un usage abusif de telles recettes. Nous offrons donc à l'utilisateur en puissance la possibilité de s'assurer qu'il emploie à bon escient les méthodes d'analyse

proposées; peut-être aura-t-il ensuite la curiosité d'approfondir ces problèmes et d'en connaître les développements dans d'autres domaines, tels que l'analyse multivariable (*).

Une seconde partie expose les applications pratiques de l'information en se limitant au cas particulier de la distribution multinomiale qui englobe les tables de contingence à double et triple entrée. Les différents tests d'homogénéité d'échantillons d'une loi multinomiale, de même que les nombreux tests d'indépendance des classifications de tables de contingence sont illustrés par des exemples empruntés aux dossiers de la Station de Biométrie. Ces exemples sont assez nombreux pour que le lecteur, désireux d'appliquer les méthodes exposées, puisse s'assurer qu'il les emploie correctement. Une table de $n \log n$ à 4 décimales pour $n \leq 200$ devrait permettre la plupart des calculs courants (**).

(*) Ce sujet est développé par KULLBACK (8) qui y consacre plus de 150 pages.

(**) Cette table a été obtenue sur la calculatrice C A E 510 du Centre de Calcul Automatique de l'Université de Nancy. Nous remercions M. le Professeur LEGRAS, ainsi que M. TOMASSONE qui a bien voulu rédiger (en ALGOL) le petit programme nécessaire. On peut encore obtenir de la Station de Biométrie du C.N.R.F., la table des valeurs de $n \log n$ (4 décimales) pour $200 < n \leq 1000$. Bien que le programme soit très simple, il peut être également mis à la disposition de tout utilisateur d'une calculatrice équipée d'un compilateur ALGOL.

PREMIÈRE PARTIE

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'INFORMATION ET DE SON ESTIMATION

0. — La notion d'information se rattache à la connaissance de l'incertain et, dès lors, est inséparable de celle d'événement aléatoire. Or, l'algèbre des événements est différente de l'algèbre des nombres : les mathématiciens ont dû imaginer de nouveaux concepts pour élargir le champ où s'exerce leur logique : la théorie des probabilités a largement participé mais doit aussi beaucoup aux progrès d'une théorie plus générale encore, la théorie de la mesure, qui constitue un domaine avancé des mathématiques modernes.

Un exposé, même très succinct, de la théorie de l'information ne saurait donc, sans sacrifier à la généralité et à la rigueur du raisonnement, se préserver d'une certaine abstraction. Pourtant, le point de départ est intuitif et, historiquement, les notions d'entropie et d'information sont nées de l'étude de problèmes pratiques, notamment ceux que pose la transmission par fil des informations (HARTLEY, SHANNON) (*). La notion d'information s'impose à l'observateur de tout phénomène aléatoire.

Un exemple l'illustrera. Une urne renferme quatre boules et l'on sait que celles-ci peuvent être, soit toutes blanches, soit deux blanches et deux noires ; ce sont là deux hypothèses H_1 et H_2 entre lesquelles on s'efforce de discriminer la bonne. On tire une première boule de l'urne, ce qui constitue une épreuve dont le résultat (aléatoire) est la couleur de la boule. Si la boule est noire, on peut immédiatement écarter H_1 (4 blanches) au profit de H_2 (2 blanches + 2 noires). Si la boule est blanche on n'en tire aucune conclusion immédiate. La première boule étant replacée dans l'urne, on effectue, après brassage, un second tirage. Dans l'hypothèse où la boule

(*) Sans oublier la thermodynamique où l'entropie est une fonction d'état.

est encore blanche (conclusion différée), on peut, par application du postulat et du théorème de BAYES, conclure que la probabilité de H_1 est augmentée (*). Ainsi le résultat de chaque épreuve, quel qu'il soit, nous a apporté une information qui a contribué chaque fois à réduire l'incertitude initiale: l'information dépend du résultat de l'épreuve et de la nature des hypothèses.

1 Définition de l'information — Divergence

1. 1 — L'information.

Soit deux mesures de probabilités définies dans un espace de probabilité Ω par:

$$(1. 1) \quad \mu_i(E) = \int_E f_i(x) \, d\lambda(x) \quad i = 1, 2$$

pour tout $E \in \mathcal{A}$ (**) et $\lambda(E) \neq 0$

$$\text{ce qui s'écrit aussi } \frac{d\mu_i}{d\lambda} = f_i(x) \quad (\lambda) \quad (*)$$

$f_i(x)$ est la densité de probabilité généralisée $0 < f_i(x) < \infty$

Si H_i désigne l'hypothèse suivant laquelle la variable aléatoire X appartient à la population dont la mesure de probabilité est μ_i , il lui correspond une certaine probabilité a priori $P(H_i)$. Lorsque X prend une valeur déterminée x , on peut encore définir une probabilité à postériori, que l'on écrit $P(H_i/x)$, ou probabilité condition-

(*) Cf. KENDALL (7), vol. 2, page 199.

(**) μ_i est une mesure de probabilité au sens général. Elle est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A})$ c'est-à-dire dans un espace Ω (ensemble des événements élémentaires ω) muni d'une σ -algèbre (ou corps de Borel) $\mathcal{A}$. On suppose en outre que μ_1 et μ_2 sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, ce qui s'écrit:

$$\mu_1 \ll \mu_2 \quad \mu_2 \ll \mu_1 \quad \mu_1 \equiv \mu_2$$

et qu'il existe une mesure λ telle que:

$$\lambda \equiv \mu_1 \quad \lambda \equiv \mu_2$$

μ_1 et μ_2 appartiennent à un ensemble dominé par λ).

La densité de probabilité généralisée $f_i(x)$, $i = 1, 2$ est définie en vertu du théorème de Radon-Nikodym; voir par exemple TORTRAT (11), chap. V.

(*) (λ) se lit « modulo λ » et signifie que la relation qui précède est vraie à l'exclusion des ensembles E appartenant à $\mathcal{A}$ ($E \in \mathcal{A}$) et de mesure λ nulle.

nelle de H_1 , $X = x$ étant donné. L'application du théorème de BAYES permet d'écrire

$$(1.2) \quad i = 1, 2$$

$$P(H_1/x) = \frac{P(H_1) f_1(x)}{P(H_1) f_1(x) + P(H_2) f_2(x)}$$

En donnant successivement à i les valeurs 1 et 2 dans (1.2) et en divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{P(H_1/x)}{P(H_2/x)} = \frac{P(H_1) f_1(x)}{P(H_2) f_2(x)}$$

ou encore, quelle que soit la base des logarithmes,

$$(1.3)$$

$$\log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \log \frac{P(H_1/x)}{P(H_2/x)} - \log \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \quad (\lambda)$$

Au second membre apparaît la différence de deux termes liés aux chances favorables à H_1 : le premier terme (après l'épreuve) implique que l'on a observé une valeur $X = x$; le second terme (avant l'épreuve) l'ignore.

Le premier membre $\log [f_1(x)/f_2(x)]$ définit alors l'*information apportée par $X = x$ en faveur de l'hypothèse H_1* . Il peut être positif ou négatif ; c'est également le *logarithme du rapport de vraisemblance*.

L'information moyenne, relativement à μ_1 est, pour :

$$x: x \in E \in \mathcal{A}$$

$$I(1:2; E) = \frac{1}{\mu_1(E)} \int_E \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\mu_1(x)$$

$$(1.4) = \frac{1}{\mu_1(E)} \int_E f_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\lambda(x) \quad \mu_1(E) > 0$$

$$= 0$$

$$\mu_1(E) = 0$$

Si E s'étend à l'espace de probabilité tout entier Ω on écrit :

(1. 5)

$$\begin{aligned} I(1 : 2) &= \int \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\mu_1(x) = \int f_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\lambda(x) \\ &= \int \log \frac{P(H_1/x)}{P(H_2/x)} d\mu_1(x) - \log \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \end{aligned}$$

En effet $\mu_1(\Omega) = 1$ par définition et $d\mu_1(x) = f_1(x) d\lambda(x)$

$I(1 : 2)$ est l'information moyenne de discrimination en faveur de H_1 (contre H_2) ou, plus succinctement, l'information de μ_1 par rapport à μ_2 .

On peut définir de façon analogue l'information de μ_2 par rapport à μ_1 .

(1. 6)

$$I(2 : 1) = \int f_2(x) \log \frac{f_2(x)}{f_1(x)} d\lambda(x)$$

1. 2 — La divergence.

On peut aussi définir une expression symétrique par rapport à H_1 et H_2 , la divergence $J(1, 2)$:

(1. 7)

$$\begin{aligned} J(1, 2) &= I(1 : 2) + I(2 : 1) \\ &= \int (f_1(x) - f_2(x)) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\lambda(x) \\ &= \int \log \frac{p(H_1/x)}{p(H_2/x)} d\mu_1(x) - \int \log \frac{p(H_2/x)}{p(H_1/x)} d\mu_2(x) \end{aligned}$$

expression d'où ont disparu les probabilités à priori $p(H_1)$ et $p(H_2)$.

$J(1, 2)$ possède certaines propriétés axiomatiques des distances (*). Elle mesure la difficulté de discriminer H_1 de H_2 . L'infor-

(*) A l'exception de celle dite « inégalité triangulaire » :

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

mation $I(1 : 2)$ peut, de la même façon, être considérée comme une mesure de la divergence orientée entre H_1 et H_2 .

1. 3 — Exemple - Distribution multinomiale.

Chaque population est constituée d'éléments appartenant à c classes auxquelles les hypothèses H_i attachent les probabilités p_{ij}

$$i = 1, 2 \qquad j = 1, 2 \dots c.$$

L'application de la formule (1. 5) au cas d'une variable discrète donne :

(1. 8)

$$I(1 : 2) = \sum_{j=1}^c p_{1j} \log \frac{p_{1j}}{p_{2j}} = p_{11} \log \frac{p_{11}}{p_{21}} + p_{12} \log \frac{p_{12}}{p_{22}} \\ \dots + p_{1c} \log \frac{p_{1c}}{p_{2c}}$$

de même

$$I(2 : 1) = \sum_j p_{2j} \log \frac{p_{2j}}{p_{1j}}$$

et

$$J(1, 2) = \sum_j (p_{1j} - p_{2j}) \log \frac{p_{1j}}{p_{2j}}$$

2 — Propriétés de l'information

2. 1 — Additivité.

L'information est *additive*. Si deux événements aléatoires X et Y sont indépendants, alors :

$$I(1 : 2 ; X, Y) = I(1 : 2 ; X) + I(1 : 2 ; Y)$$

En particulier un échantillon de n observations indépendantes fournit n fois l'information apportée par une seule observation, ce qui satisfait à une exigence intuitive. L'additivité est du reste une condition imposée a priori lorsqu'on définit de façon axiomatique l'indétermination d'une expérience, par exemple l'entropie [cf. YAGLOM et YAGLOM (13), p. 34].

Si les variables ne sont pas indépendantes, l'additivité demeure mais en fonction de probabilités conditionnelles :

$$I(1 : 2 ; X, Y) = I(1 : 2 ; X) + I(1 : 2 ; Y/X)$$

2. 2 — Convexité.

L'information est toujours positive sauf lorsque $f_1(x) = f_2(x)$ auquel cas elle est nulle.

$$I(1 : 2) \geq 0 \quad I(1 : 2) = 0 \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Si les deux densités sont les mêmes, aucune discrimination n'est possible par l'information.

On montre encore que si l'on divise un ensemble E en un certain nombre de sous-ensembles disjoints E_i tels que $\bigcup_i E_i = E$ la somme des informations relatives à chaque sous-ensemble E_i est inférieure à l'information globale sur E : autrement dit le groupement des données diminue l'information ; on dit encore que l'information est une fonction convexe (comme l'est aussi la fonction $t \log t$).

2. 3 — Transformations.

L'information n'est généralement pas conservée (invariante) lorsqu'on opère une transformation des données (choix d'une statistique) ; sa valeur diminue sauf si la statistique choisie $T(x)$ satisfait la relation :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1(T(x))}{g_2(T(x))}$$

g_1, g_2 densité de probabilité
de la variable transformée

La statistique $y = T(x)$ est alors dite « suffisante ».

En résumé, l'information est additive mais le regroupement, la condensation ou la transformation des données entraînent le plus souvent une perte d'information. Dans l'hypothèse d'une statistique suffisante, l'information est conservée mais jamais accrue.

3 — Information minima de discrimination

3. 1 — Définition.

La valeur de l'information constitue une mesure de la divergence « orientée » qui sépare l'hypothèse H_1 de l'hypothèse H_2 ; à ce

titre, elle peut permettre de discerner, dans un ensemble (dominé) de mesures de probabilité μ_1 quelle est celle qui est la plus proche de μ_2 , en d'autres termes, la plus ressemblante: c'est celle qui fournira la plus petite valeur de $I(1 : 2)$.

On a vu que $I(1 : 2) \geq 0$; l'égalité correspond à $f_1(x) = f_2(x)$ qui, dans notre cas, est sans intérêt.

Nous rechercherons donc un minimum *lié à une relation imposée* qui peut être la condition qu'une statistique mesurable définie par $Y = T(x)$ ait pour espérance mathématique une valeur donnée θ pour μ_1 .

Cette condition s'exprime sous forme analytique par:

(3. 1)

$$\int T(x) d\mu_1(x) = \int T(x) f_1(x) d\lambda(x) = \theta \quad E_1(T(x)) = \theta$$

θ étant un paramètre des populations qui, comme x , peut être multidimensionnel (et qu'on se propose par la suite d'estimer sur un ou plusieurs échantillons).

En associant $f_2(x)$ à l'ensemble des populations de l'hypothèse nulle et $f_1(x)$ à celles de l'hypothèse alternative — dont l'échantillon constitue un membre possible — en minimisant la valeur de l'information, on sélectionnera celle des populations de densité $f_2(x)$ qui est la plus proche, c'est-à-dire la plus ressemblante à l'échantillon. Si cette ressemblance est trop faible, on rejettera l'hypothèse nulle; en terme d'information, le rejet de l'hypothèse nulle interviendra si la valeur du minimum ou « information minima de discrimination » dépasse le seuil de signification que l'on s'est fixé.

On démontre le théorème suivant — KULLBACK (8), p. 38:

Théorème: Si $f_1(x)$ et une $f_2(x)$ donnée sont les densités de probabilités généralisées d'un ensemble dominé de mesures de probabilités, et si $Y = T(x)$ est une statistique mesurable telle que:

$$\theta = \int T(x) f_1(x) d\lambda(x)$$

existe

et

$$M_2(\tau) = \int f_2(x) e^{\tau T(x)} d\lambda(x)$$

existe sur un certain intervalle de τ , alors:

(3. 2)

$$I(1:2) \geq \theta \tau - \log M_2(\tau) = I(\bullet:2) \quad \theta = \frac{d}{d\tau} \log M_2(\tau)$$

avec égalité si:

(3. 3)

$$f_1(x) = f^*(x) = e^{\tau T(x)} \cdot f_2(x) / M_2(\tau) \quad (\lambda)$$

Lorsque τ varie sur son intervalle $f^*(x)$ engendre une famille exponentielle de distribution (*).

3. 2 — Application à la loi multinomiale.

Pour une distribution multinomiale où l'effectif total N est réparti en c classes, d'effectifs respectifs $x_1, x_2, \dots, x_c$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_c = N$$

et auxquelles sont attachées les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_c$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_c = 1$$

la loi de distribution est:

(3. 4)

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_c) = \frac{N!}{x_1! x_2! \dots x_c!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_c^{x_c}$$

la variable x est multidimensionnelle (c dimensions) et discrète.

La distribution conjuguée $p^*(x)$ donnant l'information minima de discrimination par rapport à la distribution de densité $p(x)$ et satisfaisant à la condition:

$$E^*(x) = \theta, \text{ qui implique } T(x) = x \text{ dans (3. 1)}$$

(*) Ce théorème introduit la fonction exponentielle $e^{\tau T(x)}$ — que nous écrivons aussi $\exp [\tau T(x)]$, notamment lorsque x et τ sont des variables à plusieurs dimensions — dont l'inverse définit la fonction logarithme. Il en résulte que désormais les logarithmes utilisés sont népériens (base e).

soit $E^*(x_i) = \theta_i$ $i = 1, 2, \dots, c$ — θ étant ici un paramètre défini dans l'espace à c -dimensions — est :

(3. 5)

$$p^*(x) = p(x) \frac{\exp(\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \dots + \tau_c x_c)}{(p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c})^N} \quad (*)$$

$$= \frac{N!}{x_1! x_2! \dots x_c!} (p_1^*)^{x_1} (p_2^*)^{x_2} \dots (p_c^*)^{x_c}$$

où

(3. 6)

$$p_i^* = \frac{p_i e^{\tau_i}}{p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c}}$$

les τ_i étant des paramètres réels définis par

(3. 7)

$$\theta_i = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \log (p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c})^N$$

puisque $\theta_i = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \log M_2(\tau)$

On remarque que la distribution d'information minima est encore multinomiale.

(*) On démontre facilement que :

$$M_2(\tau) = (p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c})^N$$

car

$$M_2(\tau) = \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_c = N} p(x) e^{\tau x}$$

dans le cas d'une variable discrète à c -dimensions. En remplaçant $p(x)$ par sa valeur de (3. 4) et $e^{\tau x}$ par $\exp(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_c x_c)$ on obtient le développement de la parenthèse ci-dessus.

D'après (3. 7)

$$\theta_1 = N p_1 e^{\tau_1} / (p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c}) = N p_1^*$$

d'où l'on tire τ_1

$$\tau_1 = \log (\theta_1 / N p_1) + \log k \quad \text{avec} \quad k = p_1 e^{\tau_1} + p_2 e^{\tau_2} + \dots + p_c e^{\tau_c} > 0$$

$$I(*; 2; O_N) = \sum_{x_1 + x_2 + \dots = N} p^*(x) \log \frac{p^*(x)}{p(x)} \quad (1)$$

$$= \tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2 + \dots + \tau_c \theta_c - N \log k$$

(3. 8)

$$I(*; 2; O_N) = \theta_1 \log \frac{\theta_1}{N p_1} + \theta_2 \log \frac{\theta_2}{N p_2} + \dots + \theta_c \log \frac{\theta_c}{N p_c}$$

Puisque K est arbitraire, on peut prendre $K = 1$ et alors

(3. 9)

$$\tau_i = \log (\theta_i / N p_i)$$

4 — Statistiques d'information

4. 1 — Estimation de l'information.

Nous avons jusqu'à présent considéré θ comme un paramètre connu de la population et nous avons défini à partir de ce paramètre la distribution conjuguée $f^*(x)$ qui fournit l'information minima de discrimination: $I(*; 2)$ donnée par la formule (3. 2).

Sur un échantillon de n observations indépendantes extraites d'une population de densité de probabilité $f_2(x)$, nous utiliserons la valeur observée de la statistique $T(x)$ comme une estimation $\hat{\theta}(x)$

(1) $I(*; 2; O_N)$ désigne l'information fournie par l'échantillon O_N d'effectif $N = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

de θ . A la valeur $\hat{\theta}$ de θ correspond une estimation $\hat{\tau}$ de τ implicite dans :

(4. 1)

$$T(x) = \hat{\theta}(x) = \left[\frac{d}{d\tau} \log M_2(\tau) \right]_{\tau = \hat{\tau}} \quad \hat{\tau}(x) = \tau(\theta(x))$$

Alors l'estimation de I est $\hat{I}$:

(4. 2)

$$\hat{I}(* : 2 ; 0_N) = \hat{\theta}(x) \cdot \hat{\tau}(x) - \log M_2 \left[\hat{\tau}(x) \right]$$

S'il existe plusieurs estimateurs sans biais $\hat{\theta}(x)$ de θ , nous choisirons celui qui donne la plus grande valeur de $I(* : 2)$ assurant ainsi le meilleur pouvoir séparateur pour la discrimination. De toutes façons $I(* : 2 ; 0)$ dans la formule (4. 2) est l'information minima de discrimination entre une population de densité de probabilité de la forme $f^*(x)$, pour laquelle la valeur du paramètre θ est la même que celle observée sur l'échantillon et la population dont la densité de probabilité est $f_2(x)$. Plus la valeur de l'information est grande, moins l'échantillon ressemble à la population $f_2(x)$.

Exemple: *distribution multinomiale.*

L'hypothèse H_2 suppose que l'échantillon d'effectif N appartient à la distribution multinomiale caractérisée par les probabilités p_i

$$i = 1, 2 \dots c \quad \sum_i p_i = 1$$

on prendra pour meilleur estimateur de $\theta_i = Np_i^*$

$$\hat{\theta}_i = x_i \text{ effectif constaté dans la classe } i.$$

Alors, en vertu de (3. 9) et (3. 8)

(4. 3)

$$\hat{\tau}_i = \log \frac{x_i}{Np_i}$$

(4. 4)

$$\hat{I}(* : 2 ; 0_N) = x_1 \log \frac{x_1}{Np_1} + x_2 \log \frac{x_2}{Np_2} + \dots x_c \log \frac{x_c}{Np_c}$$

formule que l'on peut rapprocher de (1, 8) où l'on ferait $p_1 = p_2$ et x_1

$= p_{11}$, avec naturellement $I(1 : 2 ; O_N) = N I(1 : 2)$.

N

La formule (4, 4) sera largement utilisée dans les applications pratiques.

4. 2 — Classement d'hypothèses.

Il peut se faire qu'un échantillon O_N puisse être observé sous plusieurs hypothèses H_i exhaustives et mutuellement exclusives auxquelles sont attachées les probabilités a priori $P(H_i)$

$$P(H_i) > 0 \quad \sum_i P(H_i) = 1 \quad i = 1, 2 \dots r$$

On démontre que si les probabilités conditionnelles de O_N appartiennent à une famille exponentielle [telle que $f^*(x)$] (*), la plus petite valeur $I^*(*) : m) 1 \leq m \leq r$ de l'estimation $I^*(*) : i)$ — information minima de discrimination pour H_i — est attachée à la population pour laquelle le rapport de la probabilité a posteriori $P(H_i/O_N)$ à la probabilité a priori $P(H_i)$ est maximum.

Cette valeur est une mesure de la divergence orientée entre l'échantillon et le membre de la famille H (des hypothèses H_i) dont il se rapproche le plus. On l'écrit alors $I^*(*) : H)$: c'est la statistique d'information minima de discrimination.

4. 3 — Test d'hypothèse.

Lorsqu'on désire tester une hypothèse nulle H_2 par rapport à une hypothèse alternative H_1 , on pourra le faire en se fixant la valeur α du risque de première espèce (probabilité de rejeter H_2 lorsque l'échantillon appartient aux populations de H_2).

L'hypothèse H_2 sera rejetée si

$$\text{Prob. } [I^*(*) : H_2) - I^*(*) : H_1) \geq C/H_2] \leq \alpha$$

4. 4 — Propriétés asymptotiques.

Les propriétés asymptotiques de la statistique d'information minima ont fait l'objet de nombreuses recherches souvent liées à celles des propriétés asymptotiques du logarithme du rapport de vraisemblance et plusieurs théorèmes ont établi (WILKS, KUPPERMAN) que sous certaines conditions ce rapport suivait une loi de χ^2 , centré dans l'hypothèse nulle et non centré dans l'hypothèse alternative.

(*) La plupart des lois de distribution classiques: loi normale, loi multinomiale, loi de Poisson, loi de χ^2 , etc., satisfont à cette restriction.

Plus généralement, on démontre (*) que si l'échantillon appartient à la population de densité de probabilité $f_2(x)$ pour laquelle $I^*(2; O_N) = 0$ l'estimation $\hat{I}$ de I est telle que

$2 \hat{I}^*(2; O_N)$ est asymptotiquement distribuée comme χ^2 avec k degrés de liberté, k étant la dimension du paramètre θ ; par exemple $c - 1$ dans le cas d'une distribution multinomiale à c classes (où $\sum x_i = n$ constitue une liaison entre les x_i).

On peut alors déterminer un intervalle de confiance asymptotique $1 - \alpha$ pour les paramètres de $f_2(x)$ en écrivant

$$2 \hat{I}^*(2; O_N) \leq \chi^2(k, \alpha)$$

$\chi^2(k, \alpha)$ étant la valeur lue sur la table de χ^2 , pour k degrés de liberté au seuil de probabilité α

$$\text{Prob. } [\chi^2 \geq \chi^2(k, \alpha)] = \alpha$$

La fonction $2 \hat{I}^*(2; O_N)$ étant une fonction convexe, on obtient deux limites qui déterminent entre elles l'intervalle de confiance du paramètre estimé de $f_2(x)$.

On démontre également que lorsque l'échantillon n'appartient pas à la population de densité $f_2(x)$ $2 \hat{I}^*(2; O_N)$ suit asymptotiquement une distribution de χ^2 non centré, avec k degrés de liberté, le paramètre de décentrage étant $2 \hat{I}^*(2; O_N)$ dont la valeur est nulle dans l'hypothèse nulle.

On démontre enfin que la divergence $J^*(2)$ définie comme au paragraphe 1. 2 pour la loi $f^*(x)$ est asymptotiquement égale à $2 \hat{I}^*(2)$ et par conséquent suit asymptotiquement la loi de χ^2 dans l'hypothèse nulle et de χ^2 non centré dans l'hypothèse alternative.

Cas particulier: loi multinomiale.

Dans le cas particulier de la loi multinomiale, on peut montrer assez facilement l'approximation de $2 \hat{I}^*(2)$ par une loi de χ^2 . On a pour $a > 0$ $b > 0$

$$\frac{a - b}{a} \leq \log a/b \leq \frac{a - b}{b} \quad (\log x \leq x - 1 \text{ si } x > 0)$$

(*) Voir KULLBACK (8), page 102.

en approximant $\log a/b$ par la moyenne des deux bornes — approximation qui est d'autant meilleure que a/b est proche de 1

$$a \# b$$

on peut écrire :

$$\log a/b \sim \frac{a^2 - b^2}{2ab} \quad \text{cf. (4. 4)}$$

$$I(* : 2 ; 0_N) = \sum_{i=1}^c x_i \log \frac{x_i}{Np_i}$$

$$\sum_{i=1}^c x_i \cdot \frac{x_i^2 - N^2 p_i^2}{2 x_i N p_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^c \frac{(x_i - N p_i)^2}{N p_i}$$

$$2 I(* : 2 ; 0_N) \sim \sum_{i=1}^c \frac{(x_i - N p_i)^2}{N p_i}$$

On retrouve au second membre une expression familière qui suit une loi de χ^2 à $(c - 1)$ degrés de liberté.

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS PRATIQUES

0. — Nous nous proposons maintenant d'exposer un certain nombre d'applications pratiques de l'information. Le sujet est vaste et nous nous limiterons volontairement au cadre restreint de la *loi multinomiale* qui permet la comparaison d'échantillons et l'étude des tables de contingence. Il sera possible par la suite, de développer ou de prolonger cette étude dans d'autres domaines sans qu'il soit nécessaire de revenir sur les principes théoriques de base qui ont été exposés dans la première partie.

Remarques préliminaires

0. 1 — La définition de l'information, de même que celle de l'information minima de discrimination I ou de son estimation $\hat{I}$ sont valables dans le cas le plus général. La densité de probabilité généralisée dont la définition résulte de l'application du théorème de RADON-NYKODYM n'a fait l'objet d'aucune restriction (hormis l'existence d'une mesure de probabilité dominante différente de zéro). A aucun moment, on n'a, en particulier, supposé que la densité de probabilité était celle de la loi normale (à une ou plusieurs dimensions). Cependant, les événements ou les suites d'événements considérés sont toujours aléatoires, ce qui exclut en particulier, tout abandon de la randomisation dans les dispositifs où l'on se proposera d'estimer un paramètre (ou l'effet d'un facteur contrôlé).

0. 2 — La convergence asymptotique de $2 \hat{I}^{(n)} : 2 ; O_N$ vers la loi de χ^2 est également démontrée de façon générale: la démonstration utilise le théorème central limite et implique que θ est de la forme $1/n$ fois la somme de n vecteurs indépendants (θ est géné-

ralement multidimensionnel) ayant une matrice de covariance finie. La convergence sera d'autant mieux assurée que le nombre d'observations sera élevé.

Cependant, l'estimation de l'information minima de discrimination demeure une donnée valable pour apprécier la ressemblance de deux populations (*), indépendamment de son comportement asymptotique. Elle pourra toujours servir à discriminer plusieurs hypothèses (cf. paragraphe 4, 2 ci-dessus) et à discerner la plus vraisemblable.

0. 3 — L'information fait intervenir des logarithmes népériens : on verra plus loin qu'il n'en résulte aucune complication particulière car il existe des tables de $n \log_e n$ étendues et très précises. On trouvera en particulier dans KULLBACK (8), p. 367 et sq. des tables donnant la valeur de $n \log n$ avec dix décimales pour n compris entre 1 et 1 000.

Une table moins étendue, calculée sur la CAE 510 du Centre de Calcul Automatique de l'Université de Nancy, figure en annexe. Sa précision est largement suffisante pour les calculs courants. Pour les nombres ne figurant pas sur la table, on peut toujours utiliser la formule

$$\log_e n = 2,3026 \log_{10} n$$

permettant de passer des logarithmes décimaux aux logarithmes népériens.

1 — Comparaison d'échantillons de populations multinomiales

1. 0 — Rappelons brièvement que, pour un seul échantillon, il est possible de tester une hypothèse nulle H_2 : l'échantillon

$$(x_1, x_2 \dots x_c), \quad \sum_i x_i = N$$

appartient à la population multinomiale dont les fréquences de classes sont p_i , $\sum p_i = 1 \quad i = 1, 2 \dots c$. par :

$$\hat{I}(* : 2) 0_N = \sum_1 x_1 \log \frac{x_1}{Np_1}$$

formule (4. 4) paragraphe 1-4. 1

$$= \sum_1 x_1 \log x_1 - \sum_1 x_1 \log p_1 - N \log N$$

(*) Ou de deux hypothèses caractérisées par leur loi de répartition $f_1(x)$, $f_2(x)$.

$2 \hat{I}^* : 2 ; ON$) est asymptotiquement distribuée comme χ^2 avec $(c - 1)$ degrés de liberté dans l'hypothèse nulle, ce qui permet de déterminer un intervalle de confiance pour $2 \hat{I}^*(p)$; si la valeur observée $2 \hat{I}^* : 2 ; ON$ calculée à partir des x_i observés par (4. 4) est inférieure à $\chi^2_{0,95}$ pour $v = c - 1$ degrés de liberté l'hypothèse nulle peut être acceptée.

On montre encore que $I^* : 2 ; ON$ peut être décomposé de façon additive pour tester l'opportunité de certains regroupements de classes que l'examen des données peut suggérer. Nous laisserons ce problème de côté pour nous intéresser plus spécialement à la comparaison de deux ou plusieurs échantillons.

1. 1 — Comparaison de deux échantillons.

Le problème est le suivant: on dispose de deux échantillons indépendants dont les éléments sont répartis en c classes d'effectifs:

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_c & \sum_i x_i = N_1 \text{ pour l'échantillon 1} \\ y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_c & \sum_i y_i = N_2 \text{ pour l'échantillon 2} \end{array}$$

Peut-on admettre que ces deux échantillons sont extraits d'une même population c -multinomiale?

On testera une hypothèse alternative H_1 : les échantillons appartiennent à deux populations distinctes, caractérisées par les probabilités

$$p_1 : (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1i}, \dots, p_{1c}) \quad \sum_i p_{1i} = 1$$

(1. 1)

$$p_2 : (p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2i}, \dots, p_{2c}) \quad \sum_i p_{2i} = 1$$

contre l'hypothèse nulle H_2 : les échantillons appartiennent à une seule population caractérisée par les probabilités:

(1. 2)

$$p : (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_c) \quad \sum_i p_i = 1$$

En vertu de la propriété d'additivité de l'information (cf. paragraphe I — 2. 1) et de l'indépendance mutuelle des échantillons.

(1. 3)

$$I(1 : 2) = N_1 \sum_i p_{1i} \log \frac{p_{1i}}{p_i} + N_2 \sum_i p_{2i} \log \frac{p_{2i}}{p_i}$$

Les distributions conjuguées sont — voir exemple du paragraphe I — 3. 2.

$$p^*_{1i}(x) = \frac{p(x) \exp(\tau_{11} x_1 + \dots + \tau_{1c} x_c)}{A_1} \quad \text{où } A_1 = \sum_i p_i \exp(\tau_{11} x_1)$$

(1. 4)

$$p^*_{2i}(x) = \frac{p(x) \exp(\tau_{21} x_1 + \dots + \tau_{2c} x_c)}{A_2} \quad A_2 = \sum_i p_i \exp(\tau_{21} y_1)$$

(1. 5)

$$\begin{aligned} I(* : 2) &= I(p^* : p) = \sum_i [(\tau_{11} E_1^*(x_1) + \tau_{21} E_2^*(y_1)) \\ &- N_1 (p_1 e^{\tau_{11}} + \dots + p_c e^{\tau_{1c}}) - N_2 (p_1 e^{\tau_{21}} + \dots + p_c e^{\tau_{2c}})] \end{aligned}$$

par application de la formule définissant $I(* : 2)$ (paragraphe I — 3. 1).

En posant

$$E_1^*(x_1) = N_1 p^*_{11} \quad E_2^*(y_1) = N_2 p^*_{21}$$

comme dans l'exemple du paragraphe I — 3. 2, on a :

$$p^*_{1i} = \frac{p_i e^{\tau_{1i}}}{p_1 e^{\tau_{11}} + \dots + p_c e^{\tau_{1c}}} \quad p^*_{2i} = \frac{p_i e^{\tau_{2i}}}{p_1 e^{\tau_{21}} + \dots + p_c e^{\tau_{2c}}}$$

d'où l'on tire les valeurs de τ_{11} et τ_{21} et (1. 5) devient

(1. 6)

$$I(p^* : p) = N_1 \sum p^*_{1i} \log \frac{p_{1i}}{p_1} + N_2 \sum p^*_{2i} \log \frac{p_{2i}}{p_1}$$

L'estimation $\hat{I}(p^* : p)$ de $I(p^* : p)$ fait appel aux meilleurs estimateurs sans biais de p_{11}^* et de p_{21}^* qui sont les fréquences relatives observées :

$$\hat{p}_{11}^* = \frac{x_1}{N_1} \quad \hat{p}_{21}^* = \frac{y_1}{N_2} \quad \text{d'où}$$

$$\hat{I}(p^* : p) = N_1 \sum_1 \frac{x_1}{N_1} \log \frac{x_1}{N_1 p_1} + N_2 \sum_1 \frac{y_1}{N_2} \log \frac{y_1}{N_2 p_1}$$

(1. 7)

$$\hat{I}(p^* : p) = \sum_1 (x_1 \log \frac{x_1}{N_1 p_1} + y_1 \log \frac{y_1}{N_2 p_1})$$

L'estimation de l'information minima de discrimination que nous venons de calculer est relative à une hypothèse nulle spécifiant les valeurs p_1 des probabilités de classe commune aux deux échantillons. Le test de $I(p^* : p)$ dépasse par conséquent le but que nous nous sommes assigné qui se limite au test de l'homogénéité des échantillons ; en effet, une valeur de $I(p^* : p)$ non significative autorise à ne pas rejeter les hypothèses simultanées :

— les échantillons en premier lieu sont homogènes — hypothèse $H_2(\cdot)$;

— ils appartiennent en outre à une population dont les probabilités de classe sont les valeurs de p_1 adoptées dans l'expression (1. 7) — hypothèse $H_2(\cdot/p)$. L'hypothèse H_2 de la formule (1. 2) est ainsi l'intersection de deux hypothèses :

$$H_2 = H_2(\cdot) \cap H_2(\cdot/p)$$

L'information $I(p^* : p)$ peut être additivement décomposée pour tester chacune de ces hypothèses : un premier terme permet de tester les meilleures estimations sans biais p_1 :

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1 + y_1}{N_1 + N_2}$$

des probabilités de classe (à partir des deux échantillons groupés) par rapport aux p_1 ; le second terme, analogue à un terme d'erreur, permet de tester l'homogénéité des échantillons à l'égard de cette estimation commune.

$$A \quad H_2 = H_2(\cdot) \cap H_2(\cdot/p) \text{ correspond}$$

$$: \hat{I}(p^* : p) = \hat{I}(p^* : \hat{p}) + \hat{I}(\hat{p} : p)$$

En explicitant les valeurs correspondantes, on obtient le tableau d'analyse suivant, où Σ_i désigne la sommation de $i = 1$ à $i = c$

Composante due à	Informations	Degrés de liberté
$2 \hat{I}(\hat{p} : p)$	$2 \sum_i (x_i + y_i) \log \frac{x_i + y_i}{(N_1 + N_2) p_i}$	$c - 1$
$2 \hat{I}(p^* : p)$	$2 \sum_i \left(x_i \log \frac{(N_1 + N_2) x_i}{N_1 (x_i + y_i)} + y_i \log \frac{(N_1 + N_2) y_i}{N_2 (x_i + y_i)} \right)$	$c - 1$
$2 \hat{I}(p^* : \hat{p})$	$2 \sum_i x_i \log \frac{x_i}{N_1 p_i} + y_i \log \frac{y_i}{N_2 p_i}$	$2(c - 1)$

Tableau 1.1 — Analyse de l'information (2 échantillons)

La colonne « degrés de liberté » indique ceux de la distribution de χ^2 vers laquelle tendent asymptotiquement chacune de ces expressions dans l'hypothèse nulle. L'expression de $\hat{I}(p^* : p)$ n'est autre que celle de la formule (1.7) où les probabilités p_i sont remplacées par leurs estimations groupées :

$$\hat{p}_i = \frac{x_i + y_i}{N_1 + N_2}$$

Le test d'homogénéité se fait en comparant la valeur de $2 \hat{I}(p^* : p)$ à la valeur de χ^2 significative pour $c - 1$ degrés de liberté. En développant, il vient :

(1.8)

$$\begin{aligned} I(p^* : p) &= \sum_i (x_i \log x_i + y_i \log y_i) + N \log N \\ &\quad - \sum_i (x_i + y_i) \log (x_i + y_i) - N_1 \log N_1 - N_2 \log N_2 \end{aligned}$$

avec $N_1 + N_2 = N$.

Tous les termes sont de la forme $n \log n$ et peuvent être facilement calculés dès lors qu'on dispose d'une table (*).

(*) En ce qui concerne les valeurs significatives de χ^2 la plupart des ouvrages de statistique, par exemple VESSEREAU (12), renferment des tables donnant ces valeurs aux seuils de 5 % et de 1 % au moins jusqu'à 30 degrés de liberté. Au delà, on peut utiliser la table, également classique, des probabilités cumulées de la loi normale en considérant que la variable $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2v-1}$ suit approximativement la loi normale réduite. On aura toutefois intérêt à consulter des tables plus complètes, par exemple dans SNÉDECOR (10, pp. 28-29).

Exemple d'application.

Pour une expérience destinée à étudier les possibilités de destruction sur pied du charme par badigeonnage à hauteur d'homme avec une solution de 2,4,5-T dans le fuel domestique, on a sélectionné 144 tiges qui ont été traitées en 1962 à trois époques différentes (symbolisées par A, P et H) et à deux concentrations (1 et 2), l'attribution des traitements étant faite au hasard sur des lots de même effectif. Les résultats ont été observés en 1965 en attribuant à chaque arbre une « note » choisie dans une échelle de 0 à 6 — 0 correspondant à l'arbre mort et 6 à l'arbre indemne. Ces observations sont condensées dans le tableau 1, 2 (il n'y a pas d'arbres notés 6).

Epoque	Dose	0	1	2	3	4	5	Total
A	1	10	1	3	3	2	5	24
	2	10	0	3	2	5	4	24
	Total	20	1	6	5	7	9	48
P	1	8	1	1	8	3	3	24
	2	11	1	1	4	2	5	24
	Total	19	2	2	12	5	8	48
H	1	3	0	1	3	8	9	24
	2	6	1	0	1	9	7	24
	Total	9	1	1	4	17	16	48
Total (A + P + H)		48	4	9	21	29	33	144

Tableau 1.2 — Traitement badigeonnage 2,4,5-T - 1962

A titre d'exemple de la comparaison de deux échantillons, nous prendrons celle qui concerne les deux doses de l'époque H — dont la raison apparaîtra plus loin.

On a ici $N_1 = N_2 = 24$. Les valeurs de $x_i + y_i$ figurent sur la ligne « total » de la case H: 9, 1, 1, 4, 17, 16

$$N_1 + N_2 = N = 48$$

d'où (en tenant compte que $0 \log 0 = 0$):

$$\begin{array}{rcl}
 \Sigma_1 x_1 \log x_1 + \Sigma_1 y_1 \log y_1 & = & 87,1491 \\
 + N \log N & & + 185,8176 \\
 - \Sigma_1 (x_1 + y_1) \log (x_1 + y_1) & = & - 117,8462 \\
 - N_1 \log N_1 - N_2 \log N_2 & = & - 152,5466 \\
 \hline
 \hat{I} = & & 2,5739
 \end{array}$$

$2 \hat{I}(p^* : p) = 5,15$ est asymptotiquement distribuée comme χ^2 avec $c - 1 = 5$ degrés de liberté. Alors:

$$0,25 < \text{Prob.} (\chi^2 = 5,15) < 0,50$$

Bien que le nombre d'observations ne soit pas très élevé ($N = 48$), on peut penser qu'il existe une marge de sécurité suffisante pour affirmer que les deux distributions (donc les résultats des traitements) ne diffèrent pas significativement.

Remarque: Il n'est pas inutile de rappeler que c'est $2 \hat{I}$ (et non $\hat{I}$) qui suit la distribution de χ^2 : il ne faut donc pas omettre de multiplier par 2 la valeur trouvée pour $\hat{I}$, une telle omission pouvant évidemment modifier radicalement les conclusions du test.

1. 2 — Comparaison de plusieurs échantillons.

Nous voulons maintenant comparer r échantillons afin de connaître s'ils peuvent appartenir à une même population multinomiale et, dans la négative, s'il existe des échantillons ou des groupes d'échantillons appartenant à des populations distinctes.

L'échantillon d'ordre i , $1 \leq i \leq r$, sera défini par:

$$(x_i) : x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ic} \quad 1 \leq j \leq c$$

Nous poserons:

$$\Sigma_j x_{ij} = N_i \qquad \Sigma_i x_{ij} = x_j \qquad \Sigma_i N_i = N = \Sigma_j x_j$$

1. 21 — Analyse globale de l'homogénéité.

Deux hypothèses peuvent être formulées:

H_1 : les r échantillons appartiennent à des populations multinomiales distinctes dont les probabilités sont respectivement:

$$p_i : (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ic}) \qquad i = 1, 2 \dots r$$

H_2 : les r échantillons appartiennent à une population unique caractérisée par p : ($p_1, p_2 \dots p_c$), c'est-à-dire:

$$p_{ij} = p_j \quad \text{tout } i, 1 \leq i \leq r; \quad 1 \leq j \leq c$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe 1. 1 précédent montre que:

(1. 9)

$$I(1 : 2) = \sum_i N_i \sum_j p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_j}$$

(1. 10)

$$\hat{I}(p^* : p) = \sum_i \sum_j x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{Np_j}$$

De la même façon l'estimation $\hat{I}(p^* : p)$ peut être décomposée additivement en deux termes: $\hat{I}(p : p)$, relatif aux écarts entre les p_j et la meilleure estimation sans biais à partir des r échantillons groupés et $\hat{I}(p^* : p)$ relatif aux déviations par rapport à p à l'intérieur des échantillons. Ces deux estimations suivent asymptotiquement une distribution de χ^2 avec respectivement $c - 1$ et $(r - 1)(c - 1)$ degrés de liberté. Le test d'homogénéité des échantillons se fait en comparant la valeur de $2 \hat{I}(p^* : p)$ à la valeur de χ^2 significative au seuil de probabilité choisi.

D'où le tableau d'analyse qui suit:

Composante due à	Information	Degrés de liberté
$2 \hat{I}(\hat{p} : p)$	$2 \sum_j x_j \log \frac{x_j}{Np_j}$	$c - 1$
$2 \hat{I}(p^* : \hat{p})$	$2 \sum_i \sum_j x_{ij} \log \frac{Nx_{ij}}{N_i x_j}$	$(r - 1)(c - 1)$
$2 \hat{I}(p^* : p)$	$2 \sum_i \sum_j x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{Np_j}$	$r(c - 1)$

Tableau 1.3 — r échantillons - Analyse globale.

où les sommations sont étendues de 1 à r pour i et de 1 à c pour j .

Le tableau ci-dessus exprime, avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1, 1, que

$$H_2 = H_2(\cdot) \cap H_2(\cdot/p)$$

La valeur qui nous intéresse $2 \hat{I}(p^* : p)$ se développe encore en $n \log n$ et peut s'écrire :

(1. 11)

$$\begin{aligned} 2 \hat{I}(\hat{p} : p^*) &= 2 \sum_i \sum_j x_{ij} \log x_{ij} + 2 N \log N - 2 \sum_j x_j \log x_j \\ &\quad - 2 \sum_i N_i \log N_i \end{aligned}$$

Exemples d'application.

Exemple 1:

Nous reprenons l'exemple cité dans l'introduction. Le tableau des fréquences était le suivant :

Traitement	0	1	2	3	4	5	6	Total
T1	0	0	1	2	20	17	0	40
T2	1	0	0	2	13	23	1	40
T3	2	2	5	6	17	8	0	40
Total (x_j)	3	2	6	10	50	48	1	$N = 120$

Tableau 1.4 — Traitements chimiques élagage, 1962

Les totaux de lignes et de colonnes sont respectivement les N_i et les x_j de la formule (1. 11). La table $n \log n$ doit donc être consultée pour toutes les valeurs intérieures et marginales du tableau. On trouve ici.

$$\begin{array}{rcl} \sum_i \sum_j x_{ij} \log x_{ij} & & 302,6830 \\ + N \log N & & + 574,4990 \\ - \sum_i N_i \log N_i & & - 442,6656 \\ - \sum_j x_j \log x_j & & - 419,8774 \\ \hline \hat{I}(\hat{p} : p^*) & = & 14,6390 \end{array}$$

$2 \text{ I} = 29,28$ est asymptotiquement distribuée comme χ^2 avec $2 \times 6 = 12$ degrés de liberté ($r = 3$, $c = 7$).

Comme $\chi^2_{0,05} = 21,03$ et $\chi^2_{0,01} = 26,22$, on peut conclure que les traitements diffèrent significativement. L'examen du tableau suggère que T_3 diffère probablement de T_1 et T_2 . Nous verrons qu'il est possible de tester cette hypothèse en décomposant $2 \text{ I}(p : p^*)$.

Exemple 2:

En reprenant les données du tableau 1. 2, on trouve pour l'analyse globale des 6 échantillons ($3 \text{ époques} \times 2 \text{ concentrations}$):

$$\text{I}(p : p^*) = 248,7186 + 715,6531 - 488,1091 - 457,6398 \\ = 18,6228$$

$2 \text{ I} = 37,25$ est distribuée asymptotiquement comme χ^2 avec $5 \times 5 = 25$ degrés de liberté. La valeur limite au seuil 5 % est alors: $\chi^2_{0,05} = 37,65$.

Il y a peu de chances pour que les distributions soient homogènes et il serait intéressant de disposer d'une analyse plus fine en disséquant davantage ces échantillons, ce qui est possible comme on va le voir.

1. 22 — Analyse progressive de l'homogénéité de différents échantillons.

On démontre que la loi de distribution de deux échantillons appartenant à une même loi multinomiale peut être considérée comme le produit de la loi de distribution multinomiale de l'échantillon unique (constitué par l'ensemble des deux précédents) par la loi de distribution conditionnelle de ceux-ci, étant donné l'échantillon regroupé (*).

Cette propriété s'étend de proche en proche et permet la décomposition de l'hypothèse d'homogénéité en un produit (ou mieux

(*) Il suffit d'explicitier les probabilités $p(x_1, x_2) = p(x_1).p(x_2)$ et $p(x_1 + x_2)$ des échantillons:

$$x_1 : (x_{11}, x_{12} \dots x_{1c}) \quad x_2 : (x_{21}, x_{22} \dots x_{2c}) \\ (x_1 + x_2) : (x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}, \dots, x_{1c} + x_{2c})$$

par la formule donnant les probabilités de la loi multinomiale. On voit alors que:

$$p(x_1 + x_2) = p(x_1) p(x_2) = p(x_1 + x_2) \cdot p(x_1, x_2 / (x_1 + x_2))$$

intersection) d'hypothèses successives, conditionnées par les précédentes et impliquant le regroupement progressif des échantillons. On peut écrire, sous forme symbolique,

$$H_2 = H_2(1, 2) \cap H_2(1 + 2, 3) \cap \dots \cap H_2(1 + 2 + \dots + r-1, r)$$

A cette cascade d'hypothèses correspond une dichotomie des informations puisque l'information est additive même en termes de probabilités conditionnelles. On a toujours (cf. paragraphe I — 2, 1)

$$I(1 : 2 ; X, Y) = I(1 : 2 ; X) + I(1 : 2 ; Y/X)$$

On peut donc décomposer

$$\hat{I}(p^* : \hat{p}) = \hat{I}(H_1 : H_2)$$

en $(r - 1)$ termes, qui asymptotiquement, sont distribués comme χ^2 à $(c - 1)$ degrés de liberté. Une telle analyse permet de mettre en évidence l'apparition d'un échantillon qui n'est pas homogène par rapport au groupe des précédents, d'où son intérêt dans certains cas.

Posons

$$y_{1j} = x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{1j} \quad 2 \leq j \leq r - 1$$

les y_{1j} sont les sommes — pour chaque classe j — des éléments des i premiers échantillons (totaux partiels « colonnes » jusqu'à la ligne i).

L'échantillon groupé a pour effectif total:

$$y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1c} = N_1 + N_2 + \dots + N_1 = M_1$$

La décomposition de $2 \hat{I}(p^* : p)$ s'effectue dans la forme indiquée au tableau 1.5.

A noter que chaque étape de l'analyse augmente de $(c - 1)$ le nombre de degrés de liberté de la composante d'homogénéité par suite du regroupement progressif d'échantillons homogènes entre eux. Ce regroupement n'est évidemment plus justifié dès lors qu'apparaît un échantillon i qui n'est plus homogène par rapport à l'ensemble de ses prédécesseurs (1 à $i - 1$). Il faut faire alors appel à la partition par groupes d'échantillons.

Composante	Information	Degrés de liberté
Homogénéité entre 1 et 2	$2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^c x_{1j} \log \frac{M_2 x_{1j}}{N_1 y_{21}}$	$c - 1$
Homogénéité entre 3 et (1 + 2) (ensemble)	$2 \sum_{j=1}^c (x_{3j} \log \frac{M_3 x_{3j}}{N_3 y_{3j}} + y_{2j} \log \frac{M_3 y_{2j}}{M_2 y_{3j}})$	$c - 1$
	$\vdots$	$\vdots$
Homogénéité des échantillons 1 à r - 1	$2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^c x_{ij} \log \frac{M_{r-1} x_{ij}}{N_1 y_{r-1,j}}$	$(r - 2) (c - 1)$
Homogénéité entre r et (1, 2 ..., r - 1)	$2 \sum_{j=1}^c (x_{rj} \log \frac{N x_{rj}}{N_r x_j} + y_{r-1,j} \log \frac{N y_{r-1,j}}{M_{r-1} x_j})$	$c - 1$
Homogénéité 1 à r $2 I(H_1 : H_2)$	$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij} \log \frac{N x_{ij}}{N_1 x_j}$	$(r - 1) (c - 1)$

Tableau 1.5 — r échantillons - Analyse progressive.

Comme précédemment, les termes de l'information sont tous de la forme $n \log n$ et les calculs ne présentent aucune difficulté lorsqu'on dispose d'une table donnant ces valeurs.

Exemples d'application.

Exemple 1:

Nous poursuivons l'analyse des données de l'exemple 1 du paragraphe 1. 21 dont une précédente analyse a montré qu'ils n'étaient pas homogènes; comme l'examen des chiffres semble indiquer que les échantillons T1 et T2 le sont, nous commençons notre analyse progressive dans l'ordre du tableau par la comparaison T1 : T2.

Traitement	Variable	0	1	2	3	4	5	6	N_i
T1	x_{1j}	0	0	1	2	20	17	0	40
T2	x_{2j}	1	0	0	2	13	23	1	40
T1 + T2	y_{2j}	1	0	1	4	33	40	1	80 = M_2

Tableau 1.6 - Analyse T1 : T2.

La comparaison détaillée des échantillons est ici simplifiée en raison de leur nombre: il suffira de calculer la composante d'homogénéité de T1 et T2 pour en déduire par différence la comparaison $(1 + 2) : 3$; la somme des deux informations partielles est en effet égale à l'information $I(H_1 : H_2) = I(p^* : p)$ déjà calculée précédemment.

On peut écrire:

(1. 12)

$$\sum_{j=1}^2 x_{1j} \log \frac{M_2 x_{1j}}{N_1 y_{2j}} = \sum_{j=1}^2 \sum_i x_{ij} \log x_{ij} + M_2 \log M_2 - \sum_{i=1}^2 N_i \log N_i - \sum_j y_{2j} \log y_{2j}$$

où $\sum_j$ indique la sommation de $j = 1$ à $j = c$.

Les valeurs de y_{2j} figurent au tableau 1. 6, par ailleurs:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 = 40 & M_2 &= N_1 + N_2 = 80 \\ I(1, 2) &= 216,3125 + 350,5621 - 295,1104 - 268,4851 \\ &= 3,2791 \\ 2 I(1, 2) &= 6,56 \end{aligned}$$

Avec 6 degrés de liberté, on a $\chi^2_{0,05} = 12,59$; la valeur trouvée pour 2 $\hat{I}$ n'est donc pas significative

$$- \text{de fait } 0,25 < \Pr(\chi^2 = 6,56) < 0,50 -$$

et l'on peut admettre que T1 et T2 constituent des échantillons homogènes entre eux.

La composante 2 $\hat{I}(1 + 2 : 3)$ vaut, par différence (cf. paragraphe 1. 21):

$$\begin{aligned} 2 \hat{I}(1 + 2, 3) &= 2 \hat{I}(p^0 : p) - 2 \hat{I}(1, 2) \\ &= 29,28 \quad - 12,59 \quad = 16,69 \\ &\quad \text{dl} = 6 \quad \chi^2_{0,01} = 16,81 \end{aligned}$$

L'analyse de l'information indique donc que le traitement T_3 donne des fréquences significativement différentes de celles données par les traitements T1 et T2, celles-ci pouvant être considérées comme homogènes entre elles.

Remarque.

Cet exemple a été volontairement choisi pour souligner les dangers de l'automatisme dans l'utilisation des méthodes statistiques. Le test d'homogénéité sur les échantillons T1 et T2 conduit à conclure que ces échantillons peuvent être considérés comme appartenant à une même distribution multinomiale dont les probabilités attachées à chaque classe ont pour valeur les fréquences relatives marginales $p_j = y_{2j}/M_2$. On observe ici que $p_1 = 0$ (classe 1), ce qui signifie qu'en réalité la distribution commune ne comporte plus 7, mais seulement 6 classes. Dans cette hypothèse, un test d'homogénéité plus précis peut être logiquement appliqué en abaissant de 6 à 5 le nombre de degrés de liberté du χ^2 asymptotique mais on ne peut plus dès lors comparer des distributions dont le nombre de classe est différent suivant le choix des regroupements opérés...

Si l'on observe dans une classe des effectifs nuls sur plusieurs échantillons et une fréquence très faible pour l'ensemble de ceux-ci, on doit se demander si l'existence de cette classe est justifiée. La question se pose manifestement pour les données du tableau 1. 4 où l'on constate que les notes 1 et 6 sont absentes dans deux échantillons sur trois et que leur fréquence relative, pour l'ensemble, est respectivement 1/60 et 1/120. La définition de la notation conduit ici à admettre que l'on peut, compte tenu de la marge d'appréciation individuelle d'un observateur, regrouper les classes 1 et 2 et les classes 5 et 6, ce qui évite d'avoir à affronter un problème théorique délicat.

Exemple 2:

Sur les données du tableau 1. 2 (paragraphe 1. 1), nous allons tester l'homogénéité des quatre premiers échantillons A1, A2, P1, P2 et leur comparer le cinquième (H1). Pour la clarté des calculs, nous constituons le tableau suivant:

Traitement	Variable	0	1	2	3	4	5	Totaux
A 1 $i = 1$	x_{1j}	10	1	3	3	2	5	24 (N1)
A 2 $i = 2$	x_{2j}	10	0	3	2	5	4	24 (N2)
P 1 $i = 3$	x_{3j}	8	1	1	8	3	3	24 (N3)
P 2 $i = 4$	x_{4j}	11	1	1	4	2	5	24 (N4)
A1 + A2 + P1 + P2	x_{4j}	39	3	8	17	12	17	96 (N4)
H 1 $i = 5$	x_{5j}	3	0	1	3	8	9	24 (N5)
A1 + A2 + P1 + P2 + H1	y_{5j}	42	3	9	20	20	26	120 (N5)

Tableau 1.7

Nous calculons d'abord $I(1 \text{ à } 4)$, composante de l'information interne aux échantillons 1, 2, 3 et 4 de façon à tester l'homogénéité de cet ensemble. En développant, il vient:

$$\begin{aligned} \hat{I}(1 \text{ à } 4) = & \sum_{i=1}^4 \sum_j x_{ij} \log x_{ij} + M_4 \log M_4 - \sum_{i=1}^4 N_i \log N_i \\ & - \sum_j y_{4,j} \log y_{4,j} \end{aligned}$$

NOTA: On remarque que le calcul de $n \log n$ s'applique toujours aux valeurs internes et marginales du tableau constitué par le groupe d'échantillons étudié.

$$\begin{aligned} I(1 \text{ à } 4) = & 161,5695 + 438,1774 - 305,0932 - 288,9583 \\ = & 5,6954 \end{aligned}$$

$2 I(1 \text{ à } 4) = 11,39$ est distribuée asymptotiquement comme χ^2 avec $3 \times 5 = 15$ degrés de liberté. La probabilité d'observer la valeur trouvée est d'environ 0,75 car $\text{Prob}(\chi^2 = 11,04) = 0,75$.

On peut, sans risque, conclure à l'homogénéité des quatre premiers échantillons.

L'étape suivante consiste à calculer la seconde composante de l'information attachée à la comparaison de l'échantillon 5 et du

groupe 1 + 2 + 3 + 4 considéré comme échantillon d'une distribution d'effectif total :

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = M_4$$

On développe encore les différents termes de la formule donnant cette information, ce qui donne, par mise en facteur des quantités non indexées par j :

$$\begin{aligned} & \sum_j x_{5j} \log x_{5j} + \log M_5 \cdot \sum_j x_{5j} - \log N_5 \cdot \sum_j x_{5j} \\ & - \sum_j x_{5j} \log y_{5j} + \sum_j y_{4j} \log y_{4j} + \log M_5 \cdot \sum_j y_{4j} \\ & - \sum_j y_{4j} \log y_{5j} \end{aligned}$$

En tenant compte des égalités suivantes :

$$\sum_j x_{5j} = N_5 \quad \sum_j y_{4j} = M_4 \quad M_4 + N_5 = M_5 = \sum_j y_{5j}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \sum_j y_{4j} \log y_{4j} + \sum_j x_{5j} \log x_{5j} + M_5 \log M_5 - M_4 \log M_4 \\ & - N_5 \log N_5 - \sum_j y_{5j} \log y_{5j} \end{aligned}$$

En définitive, on retrouve, une fois de plus, les valeurs internes et marginales du tableau constitué par l'échantillon groupé (1 à 4) et l'échantillon introduit dans le test d'homogénéité, règle dont l'intérêt pratique est évident car elle évite de se reporter à des formules compliquées (en apparence).

Sur les chiffres du tableau 1. 7, on trouve :

$$\hat{I} = 331,9604 + 574,4990 - 514,4507 - 384,5926 = 7,4161$$

$2 \hat{I} = 14,83$ est distribuée comme χ^2 avec $c - 1 = 5$ degrés de liberté. Cette valeur est significative car la probabilité de $\chi^2 = 14,83$ est voisine de 0,01 (la valeur correspondant à 0,01 est 15,09). On conclut à l'existence d'une hétérogénéité significative entre l'échantillon 5 et les précédents.

1. 23 — *Comparaison de groupes d'échantillons.*

Dans l'exemple 1 qui précède, on aurait pu considérer que l'ensemble de trois échantillons pouvait constituer deux groupes: d'un côté T1 et T2, de l'autre T3; plus généralement, il se peut que les conditions de l'expérimentation nécessitent — ou que l'examen des données suggère — des groupements possibles au sein de l'ensemble des échantillons. La question se pose alors de savoir si de tels groupements sont valables, c'est-à-dire de tester leur homogénéité interne et dans l'affirmative, d'examiner s'ils appartiennent à des distributions multinomiales distinctes. En analyse de variance, la méthode des contrastes peut permettre des jugements analogues. L'analyse de l'information autorise également de telles comparaisons grâce à la précieuse propriété d'additivité.

Soit encore r échantillons x_{ij} $1 \leq i \leq r$ $1 \leq j \leq c$

on suppose qu'on divise ces r échantillons en deux groupes et que l'on désire s'assurer de la validité des regroupements.

Le groupe 1 est constitué des échantillons 1 à k , le groupe 2 de $k + 1$ à r . On pose alors:

$$Z_{1j} = x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{kj} \quad T_1 = \sum_j Z_{1j}$$

$$Z_{2j} = x_{k+1,j} + \dots + x_{rj} \quad T_2 = \sum_j Z_{2j}$$

La décomposition de l'information se fait alors comme suit:

Composante	Information	degré de liberté
Entre groupe 1 et groupe 2	$2 \sum_j (Z_{1j} \log \frac{NZ_{1j}}{T_1 x_j} + Z_{2j} \log \frac{NZ_{2j}}{T_2 x_j})$	$c - 1$
Homogénéité du groupe 1	$2 \sum_{j=1}^K \sum_j x_{ij} \log \frac{T_1 x_{ij}}{N_1 Z_{1j}}$	$(k - 1) (c - 1)$
Homogénéité du groupe 2	$2 \sum_{i=k+1}^r \sum_j x_{ij} \log \frac{T_2 x_{ij}}{N_2 Z_{2j}}$	$(r - k - 1) (c - 1)$
$2 I(p^* : \beta) = 2 I(H_1 : H_2)$	$2 \sum_{i=1}^r \sum_j x_{ij} \log \frac{N x_{ij}}{N_1 x_j}$	$(r - 1) (c - 1)$

Tableau 1.8 — r échantillons - Analyse de groupes.

Comme précédemment, le développement des termes des informations partielles se présente comme une suite de $n \log n$ et ne présente aucune difficulté.

Exemple d'application:

Sur les données du tableau 1. 2 (paragraphe 1. 1), nous allons tester l'effet de la dose d'application en constituant deux groupes d'échantillons,

- d'une part, A1, A2, P1 et P2 (groupe 1)
- d'autre part, H1 et H2 (groupe 2)

ce qui donne les valeurs suivantes de Z_{1j} , Z_{2j} , T_1 et T_2 :

$$\begin{array}{ll} Z_{1j}: 39, 3, 8, 17, 12, 17 & T_1 = 96 \\ Z_{2j}: 9, 1, 1, 4, 17, 16 & T_2 = 48 \end{array}$$

En développant les formules des composantes du tableau 1. 8, on trouve, par exemple, pour la composante interne au groupe 1

(1. 13)

$$\sum_{i=1}^k \sum_j x_{ij} \log x_{ij} + T_1 \log T_1 - \sum_{i=1}^k N_i \log N_i - \sum_j Z_{1j} \log Z_{1j}$$

Là encore, ne subsistent au développement que les valeurs internes ou marginales du tableau partiel constitué par le groupe d'échantillons. De même pour la composante d'homogénéité entre groupes qui s'écrit:

(1. 14)

$$\begin{aligned} & \sum_j Z_{1j} \log Z_{1j} + \sum_j Z_{2j} \log Z_{2j} + N \log N - \sum_j x_j \log x_j \\ & - T_1 \log T_1 - T_2 \log T_2 \end{aligned}$$

la règle habituelle s'applique en considérant comme valeurs internes les totaux partiels des deux groupes.

Les composantes internes à chaque groupe d'échantillons ont déjà été calculées précédemment (avec des notations légèrement différentes) aux paragraphes 1. 1, exemple d'application, et 1. 22, analyse progressive, exemple 2.

$$\begin{array}{ll} \text{On a trouvé} & \hat{I}(1 \text{ à } 4) = 5,6954 & 2 \hat{I}(1 \text{ à } 4) = 11,39 \\ & \hat{I}(5 \text{ et } 6) = 2,5739 & 2 \hat{I}(5 \text{ et } 6) = 5,15 \end{array}$$

La comparaison des deux groupes donne:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= 406,8045 + 715,6531 - 488,1091 - 623,9950 = 10,3535 \\ 2 \hat{I} &= 20,71 \end{aligned}$$

Le χ^2 correspond à $c - 1 = 5$ degrés de liberté à une probabilité inférieure à 0,005. Les deux groupes diffèrent donc significativement.

En additionnant les trois valeurs trouvées pour l'information

$$2 [5,6954 + 2,5739 + 10,3535] = 2 \times 18,6228$$

on retrouve bien l'information totale qui a été calculée pour le test d'homogénéité globale de l'échantillon (paragraphe 1. 21, exemple 2). Cette vérification permet de contrôler les calculs: toutes les propriétés additives des *expressions formelles* de l'information découlent de l'additivité de la fonction logarithme. On pourrait encore décomposer l'homogénéité interne aux groupes 1 à 4 en deux composantes d'homogénéité interne à (1 + 2) et (3 + 4) et une composante d'homogénéité des deux groupes précédents. On voit combien la méthode est souple et permet de tester de nombreuses hypothèses.

Si nous récapitulons les résultats de l'analyse exhaustive des résultats du tableau 1, 2, on constate ce qui suit:

- l'ensemble des traitements n'est pas homogène,
- l'ensemble des traitements A et P l'est, de même que l'ensemble H1, H2,
- il existe des différences significatives entre les deux groupes ainsi définis.

On peut conclure, sur le plan pratique, que l'influence de la dose n'est pas significative et qu'en ce qui concerne la saison d'application, on obtient des résultats comparables au printemps et à l'automne (c'est-à-dire pendant la saison de végétation), ces résultats étant supérieurs à ceux que l'on observe avec un traitement d'hiver.

Remarque 1:

L'information se décompose de façon additive suivant un schéma qui n'est pas sans analogie avec celui de l'analyse de variance — sans parler naturellement du χ^2 pour lequel la ressemblance est encore plus marquée.

Remarque 2:

Il faut encore insister sur le fait qu'en dépit de la complexité apparente de la formulation des termes de l'information, les calculs se ramènent toujours à la sommation de termes en $n \log n$. Dans les cas simples, on pourra toujours utiliser une table; est-il nécessaire d'ajouter que le calcul des $\sum n \log n$ est un jeu pour le calculateur électronique qui pourra être mis à contribution dans les

cas plus compliqués. Une règle simple s'applique aux sommations relatives au test d'homogénéité d'échantillons groupés: on calculera les valeurs de $n \log n$ pour les différents termes du tableau (intérieurs et marginaux) et leur signe découle du tableau suivant, qu'il est facile de retenir:

+	-
-	+

Par exemple:

$$\hat{I}(1 : 2) = \sum_i \sum_j x_{ij} \log x_{ij} + N \log N - \sum_j x_j \log x_j - \sum_i N_i \log N_i$$

2 — Tables de contingence

2. 0 — Une table de contingence est un échantillon d'une loi multinomiale dont les constituants sont classés suivant deux ou plusieurs critères. Si une table de contingence à double entrée $r \times c$ se présente formellement comme un tableau de comparaison de r échantillons indépendants d'une loi multinomiale à c classes, il faut se garder de confondre les deux problèmes.

Dans la comparaison d'échantillons, les probabilités afférentes aux cases d'une même ligne ne sont pas indépendantes. Elles sont liées par la relation $\sum_j p_{ij} = 1$ ou encore $\sum_j x_{ij} = N_i$ effectif total choisi pour l'échantillon i .

Le nombre de degrés de liberté total du χ^2 asymptotique de l'estimation de l'information minima de discrimination $2 \hat{I}(p^* : p)$ est ainsi $r(c - 1)$.

Dans une table de contingence à double entrée, le nombre de classes de la loi multinomiale n'est plus c , mais rc correspondant aux différentes combinaisons des deux caractères observés sur les N individus. L'effectif d'une ligne n'est plus fixé a priori: on le constate. Le nombre de degrés de liberté du χ^2 asymptotique de l'estimation de l'information minima de discrimination

$$2 \hat{I}[(p)^* : (p)] \text{ est alors } rc - 1$$

car on a une seule relation: $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

A l'hypothèse d'homogénéité des échantillons se substitue une hypothèse d'indépendance des caractères définissant la classification en lignes et en colonnes. Cette distinction est un peu analogue à celle qui sépare, dans l'analyse de variance, le modèle fixe du modèle aléatoire (dans le modèle fixe, il est utile de comparer les moyennes, dans le modèle aléatoire cette comparaison est sans intérêt).

2. 1 — Tables de contingence à double entrée.

Soit une table de contingence à r lignes et c colonnes dans laquelle on a classé les divers individus d'un échantillon d'effectif N , l'effectif d'une case étant x_{ij} $1 \leq i \leq r$ $1 \leq j \leq c$

Les fréquences marginales observées sont respectivement :

$$\begin{aligned} x_{i.} &= \sum_j x_{ij} & x_{.j} &= \sum_i x_{ij} \\ \text{et } \sum_i x_{i.} &= \sum_j x_{.j} = N \end{aligned}$$

L'hypothèse nulle est l'hypothèse d'indépendance des deux caractères qui, en termes de probabilités, s'écrit avec les mêmes indices :

$$p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$$

Nous testerons donc l'hypothèse alternative H_1 .

$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.} p_{.j}$ pour au moins un couple (i, j) $p_{ij} > 0$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

contre l'hypothèse nulle,

$$H_2 : p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \quad \forall i, j$$

avec :

$$\sum_i p_{i.} = 1 \quad \sum_j p_{.j} = 1 \quad p_{i.} > 0 \quad p_{.j} > 0$$

On montre, comme dans le cas de la comparaison de r échantillons, que

(2. 1)

$$I(H_1 : H_2) = N \sum_i \sum_j p_{1j} \log \frac{p_{1j}}{p_{1.} p_{.j}}$$

Pour la distribution conjuguée $(p)^*$ dont les paramètres sont la meilleure estimation sans biais pouvant être obtenue à partir de l'échantillon, l'estimation $I[(p)^* : (p)]$ a pour valeur :

(2. 2)

$$\hat{I}[(p)^* : (p)] = \sum_i \sum_j x_{1j} \log \frac{x_{1j}}{N p_{1.} p_{.j}}$$

En pratique, nous ne voulons pas tester l'échantillon par rapport à l'hypothèse H_2 qui implique des valeurs définies $p_{1.}$ et $p_{.j}$ des distributions marginales. L'hypothèse nulle H_2 dépasse donc l'objectif recherché : heureusement, elle peut encore être décomposée en plusieurs sous-hypothèses dont elle constitue l'intersection.

On peut en effet écrire :

$$H_2 = H_2(R) \cap H_2(C) \cap H_2(R \times C)$$

$H_2(R)$ et $H_2(C)$ spécifiant les valeurs $p_{1.}$ et $p_{.j}$ et $H_2(R \times C)$ exprimant l'indépendance sous ces conditions.

L'information $I[(p)^* : (p)]$ se décompose alors additivement en trois composantes qui correspondent respectivement :

— aux déviations entre les $p_{1.}$ et leurs estimations à partir de l'échantillon,

— aux déviations entre les $p_{.j}$ et leurs estimations à partir de l'échantillon,

— aux déviations par rapport à l'hypothèse d'indépendance, compte tenu de l'estimation ci-dessus des distributions marginales.

On montre que les meilleures estimations des paramètres sont :

$$\hat{p}_{1.} = \frac{x_{1.}}{N} \quad \hat{p}_{.j} = \frac{x_{.j}}{N} \quad \hat{p}_{1j} = \frac{x_{1.}}{N} \cdot \frac{x_{.j}}{N}$$

et l'analyse k de l'information se fait suivant le tableau ci-après :

Composante	Information	degrés de liberté
Lignes $\hat{p}_{1.} = x_{1.}/N$	$2 \sum_i x_{1.} \log \frac{x_{1.}}{N p_{1.}}$	$r - 1$
Colonnes $\hat{p}_{.j} = x_{.j}/N$	$2 \sum_j x_{.j} \log \frac{x_{.j}}{N p_{.j}}$	$c - 1$
<u>Indépendance</u> $2 \hat{I}(p)^* : (\hat{p})$	$2 \sum_i \sum_j x_{ij} \log \frac{N x_{ij}}{x_{1.} x_{.j}}$	$(r - 1)(c - 1)$
Total $2 \hat{I}(p)^* : (p)$	$2 \sum_i \sum_j x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{N p_{i.} p_{.j}}$	$rc - 1$

Tableau 2.1 — Indépendance, table à double entrée.

Le calcul de la composante d'indépendance est toujours aussi aisé avec la table de n log n . On a en effet :

(2. 2)

$$2 \hat{I}(p)^* : (\hat{p}) = 2 \left(\sum_i \sum_j x_{ij} \log x_{ij} + N \log N - \sum_i x_{1.} \log x_{1.} - \sum_j x_{.j} \log x_{.j} \right)$$

Cette expression suit asymptotiquement une loi de χ^2 à $(r - 1)(c - 1)$ degrés de liberté dans l'hypothèse d'indépendance. On remarquera son analogie formelle avec la valeur de $2 \hat{I}(p^* : p)$ dans le cas de la comparaison de r échantillons.

Exemple d'application:

Pour l'expérimentation du débroussaillage sélectif (dégagements) des plantations résineuses, une application aérienne de 2.4.5-T a été pratiquée sur une parcelle de taillis enrésiné mettant en œuvre 120 l/ha d'une émulsion à 3 % d'un produit commercial à 710 g/l d'acide 2.4.5-T; cf. ARBONNIER (1). Pour apprécier les résultats de ce traitement — et notamment la réduction du couvert — on a procédé sur les interbandes à un sondage systématique

au 1/10. Pour chaque brin de taillis d'une placette de sondage, on a ainsi relevé l'essence et une note de résistance (échelle conventionnelle de 0 à 6).

Les résultats d'ensemble du sondage sont reportés sur le tableau suivant:

Essence \ Note	0	1	2	3	4	Total
Bouleau	27	8	14	8	15	72
Tremble	2	5	1	16	14	38
Chêne	3	1	1	11	5	21
Total	32	14	16	35	34	131

Tableau 2.2 — Sondages de contrôle - Mur de Sologne, parcelle E3

On a bien ici un tableau de contingence, chaque caractère étant *simultanément constaté* sur les éléments de l'échantillon. Si les essences réagissent de façon comparable au produit, les caractères « ligne » et « colonne » sont indépendants.

L'indépendance est testée en appliquant la formule (2. 2) ci-dessus, on a :

$$\begin{array}{rcl}
 \sum_{i,j} x_{ij} \log \hat{x}_{ij} & : & 328,2877 \\
 + N \log N & : & + 638,6508 \\
 - \sum_i x_{i.} \log x_{i.} & : & - 510,0833 \\
 - \sum_j x_{.j} \log x_{.j} & : & - 436,5452 \\
 \hline
 I & = & 20,3100 \qquad 2 \hat{I} = 40,62
 \end{array}$$

à $4 \times 2 = 8$ degrés de liberté.

$$\chi^2_{0,05} = 15,51$$

$$\chi^2_{0,01} = 20,09$$

La valeur trouvée pour $2 \hat{I}$ est donc hautement significative. Cette conclusion n'a rien de surprenant: il est clair, lorsqu'on examine le tableau, que le comportement du bouleau est à priori différent de celui du tremble et du chêne.

2. 2 — *Table de contingence à triple entrée.*

L'analyse de l'information offre de nombreuses possibilités dans le cas des tables de contingence à triple entrée et nous ne les traiterons pas toutes. La gamme étendue des hypothèses que l'on peut tester résulte du fait que l'hypothèse nulle d'indépendance globale que l'on peut symboliquement désigner par $H_2 (R \times C \times E) = E$ désignant ici l'étage ou troisième dimension de la table — peut être définie comme l'intersection de diverses sous-hypothèses, successivement conditionnelles auxquelles correspond une décomposition additive de l'information. On trouvera dans KULLBACK (8), chapitre 8, une étude complète des tables de contingence à triple entrée; dans ce domaine, l'analyse de l'information paraît plus diversifiée que l'analyse classique qui utilise la loi de χ^2 .

2. 21 — *Indépendance globale.*

Un échantillon est constitué de N éléments sur lesquels on observe simultanément trois caractères correspondant à une classification par lignes (indexée par i , $1 \leq i \leq r$), une classification par colonnes (indexée par j , $1 \leq j \leq c$) et une classification par étages (indexée par k , $1 \leq k \leq d$). Une fréquence observée est désignée par x_{ijk} et les différentes fréquences marginales s'écrivent suivant la notation classique:

$$\sum_i x_{ijk} = x_{.jk} \quad \sum_i \sum_j x_{ijk} = x_{..k} = \sum_j x_{.jk}$$

$$\sum_i x_{i..} = \sum_j x_{.j.} = \sum_k x_{..k} = N$$

L'hypothèse d'indépendance des facteurs s'exprime, en indexant les probabilités de la même manière que les fréquences par:

$$H_2 : p_{ijk} = p_{i..} p_{.j.} p_{..k} \quad p_{i..} > 0, p_{.j.} > 0, p_{..k} > 0$$

sous les conditions:

$$\sum_i p_{i..} = \sum_j p_{.j.} = \sum_k p_{..k} = 1$$

les sommations étant étendues de 1 à r pour i , de 1 à c pour j , de 1 à d pour k .

L'hypothèse alternative H_1 est définie par:

$$H_1 : p_{ijk} \neq p_{i..} p_{.j.} p_{..k}$$

pour au moins un triplet (i, j, k) sous les seules conditions:

$$p_{ijk} > 0 \quad \sum_{ijk} p_{ijk} = 1$$

On montre que l'on a toujours:

(2. 3)

$$I(H_1 : H_2) = N \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} \log \frac{p_{ijk}}{p_{i..} p_{.j.} p_{..k}}$$

Si $(p)^*$ désigne la distribution conjuguée dont les paramètres sont ceux de la meilleure estimation sans biais obtenue à partir de l'échantillon, on a pour l'estimation de l'information correspondante:

(2. 4)

$$\hat{I}((p)^* : (p)) = \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{N p_{i..} p_{.j.} p_{..k}}$$

Cette information est relative à des valeurs déterminées des probabilités marginales, donc à une hypothèse H_2 plus restrictive que celle que nous désirons vérifier. En désignant symboliquement par $H_2(R)$ l'hypothèse spécifiant une valeur donnée $p_{i..}$ et de même $H_2(C)$ et $H_2(E)$, on peut considérer H_2 comme les intersections d'hypothèses conditionnelles successives symbolisées par la formule:

$$H_2 = H_2(R) \cap H_2(C) \cap H_2(E) \cap H_2(R \times C \times E)$$

L'hypothèse $H_2(R \times C \times E)$ est l'hypothèse d'indépendance que nous voulons tester. L'information $I[(p)^* : (p)]$ peut alors être décomposée additivement pour faire apparaître le terme correspondant à l'hypothèse d'indépendance.

Les termes correspondants de la décomposition seront distribués asymptotiquement comme χ^2 avec respectivement $r - 1$, $c - 1$, $d - 1$ et $r \times c \times d - 1 - (r - 1 + c - 1 + d - 1)$

$$= (rcd - r - c - d + 2) \text{ degrés de liberté.}$$

Le tableau d'analyse est le suivant :

Nature de la composante	Information	Degrés de liberté
Lignes $H_2(R)$ $\beta_{i..} = x_{i..}/N$	$2 \sum_i x_{i..} \log \frac{x_{i..}}{N p_{i..}}$	$r - 1$
Colonnes $H_2(C)$ $\beta_{.j.} = x_{.j.}/N$	$2 \sum_j x_{.j.} \log \frac{x_{.j.}}{N p_{.j.}}$	$c - 1$
Stages $H_2(E)$ $\beta_{..k} = x_{..k}/N$	$2 \sum_k x_{..k} \log \frac{x_{..k}}{N p_{..k}}$	$d - 1$
<u>Indépendance</u> $H_2(R \times C \times E)$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{N^2 x_{ijk}}{x_{i..} x_{.j.} x_{..k}}$	$red - r - c - d + 2$
$2 \hat{I}((p) : (p))$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{N p_{i..} p_{.j.} p_{..k}}$	$red - 1$

Tableau 2.3 — Indépendance; table à triple entrée.

$$\text{où } \sum_{ijk} \text{ signifie } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^d$$

On testera l'indépendance en comparant aux valeurs de χ^2 correspondant au nombre de degrés de liberté indiqué et au seuil de probabilité choisi, l'expression figurant sur l'avant-dernière ligne de ce tableau qui peut encore s'écrire :

$$2 \hat{I} = 2 \left(\sum_{ijk} x_{ijk} \log x_{ijk} + 2 N \log N - \sum_i x_{i..} \log x_{i..} - \sum_j x_{.j.} \log x_{.j.} - \sum_k x_{..k} \log x_{..k} \right)$$

2. 22 — Indépendance d'une classification par rapport aux autres.

On peut aussi se demander si l'une des classifications de la table est indépendante des deux autres.

L'hypothèse H_2 est alors exprimée par la relation :

(2. 6)

$$H_2 : p_{ijk} = p_{..k} \cdot p_{ij.} \quad p_{..k} > 0 \quad p_{ij.} > 0$$

avec $\sum_k p_{..k} = 1 \quad k = 1, 2, \dots, d \quad \sum_{ij} p_{ij.} = 1$

alors que l'hypothèse H_1 est :

$$p_{ijk} \neq p_{..k} \cdot p_{ij.}$$

pour au moins un triplet (i, j, k)

$$p_{ijk} > 0 \quad \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} = 1$$

Si l'hypothèse H_2 est vérifiée, on peut écrire en utilisant la relation (2. 6) :

$$\begin{aligned} p_{.jk} &= \sum_i p_{i.jk} = p_{..k} \sum_i p_{ij.} = p_{..k} \cdot p_{.j.} \\ p_{i.k} &= \sum_j p_{ij.k} = p_{..k} \sum_j p_{ij.} = p_{..k} \cdot p_{i..} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'indépendance de l'étage par rapport aux lignes et aux colonnes entraîne l'indépendance des lignes et des colonnes entre elles.

Il y a deux manières d'obtenir la composante d'information permettant le test de l'hypothèse H_2 . La première consiste à estimer $2 I[(p)^* : (p)]$ et à la décomposer, comme on l'a déjà fait chaque fois auparavant, en trois termes : le premier concernant le test des $p_{..k}$ par rapport aux $p_{.jk}$, le second un test analogue sur p_{ij} et le dernier s'appliquant à l'hypothèse générale d'indépendance. Ces trois termes sont additifs et correspondent à la suite d'hypothèses :

$$H_2 = H_2(E) \cap H_2(RC) \cap H_2(E \times RC)$$

La seconde méthode consiste à décomposer l'hypothèse d'indépendance des trois classifications en une hypothèse d'indépendance de R par rapport à C associée à celle de E par rapport à RC , soit symboliquement :

$$H_2(R \times C \times E) = H_2(R \times C) \cap H_2(E \times RC)$$

On a alors le tableau suivant d'analyse de l'information :

Nature de la composante	Information	Degrés de liberté
Lignes x colonnes $H_2 (R \times C)$	$2 \sum_{ij} x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{x_{i..} x_{.j.}}$	$(r - 1)(c - 1)$
Stages x (lignes, colonnes) $H_2 (E \times RC)$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{N x_{ijk}}{x_{ij.} x_{.jk}}$	$(d - 1)(rc - 1)$
Indépendance $H_2 (R \times C \times E)$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{N^2 x_{ijk}}{x_{i..} x_{.j.} x_{...k}}$	$red - r - c - d + 2$

Tableau 2.4 — Indépendance (étages x lignes, colonnes)

On testera par χ^2 l'expression figurant sur la seconde ligne du tableau dont le développement est explicité dans l'exemple qui suit.

Exemple d'application :

Le tableau (2.5) rassemble les résultats des sondages réalisés pour

Dose	Essence	0	1	2	3	4	5	Total
3,5 % P 80	Bouleau	228	143	162	180	23	0	736
	Tremble	50	51	97	188	73	0	459
	Châtaignier	13	18	19	57	175	0	282
	Chêne	0	0	4	9	10	0	23
	Total	291	212	282	434	281	0	1 500
3 % P 80	Bouleau	195	62	51	67	14	0	389
	Tremble	22	33	56	85	68	0	264
	Châtaignier	3	1	0	9	30	9	52
	Chêne	4	5	10	37	17	0	73
	Total	224	101	117	198	129	9	778
Ensemble ($x_{ij.}$)	Bouleau	423	205	213	247	37	0	1 125
	Tremble	72	84	153	273	141	0	723
	Châtaignier	16	19	19	66	205	9	334
	Chêne	4	5	14	46	27	0	96
	Total Général	515	313	399	632	410	9	2 278

Tableau 2.5 - Traitement hélicoptère Mur de Sologne - Résultats globaux (*)

(*) On peut s'interroger sur la nécessité du maintien de la classe 5. Cependant, la différence entre les notes 4 et 5, dans l'échelle adoptée, est très nette; d'autre part, pour le traitement 3 %, la proportion de châtaigniers observée (17,3 %) est trop importante pour qu'on puisse la négliger.

contrôler les résultats de l'application aérienne dont il a déjà été question au paragraphe 2. 21 ci-avant. Sur deux groupes de parcelles, deux traitements ont été mis en œuvre, correspondant à des concentrations différentes (3 % et 3,5 %) du produit à base de 2.4.5-T. On est en droit de se demander si les différentes essences ont réagi de façon identique à une modification de la concentration du produit. S'il en était ainsi, la classification « dose » serait indépendante des classifications par essences et par symptômes de résistance (notes de 0 à 6).

L'information relative à l'hypothèse d'indépendance $H_2 (E \times RC)$, E désignant la concentration, s'écrit en développant :

(2. 8)

$$\hat{I} = \sum_{i,j,k} x_{ijk} \log x_{ijk} + N \log N - \sum_{i,j} x_{ij.} \log x_{ij.} - \sum_k x_{...k} \log x_{...k}$$

$$\text{Ici, } r = 4 \quad c = 6 \quad d = 2$$

$$x_{.,1} = 1\,500 \quad x_{.,2} = 778 \quad N = 2\,278$$

les valeurs $x_{ij.}$ figurent sous la table, au tableau « ensemble ».

On trouve :

$$\begin{aligned} I &= 10\,480,026 + 17\,611,357 - 11\,823,963 - 16\,148,783 \\ &= 118,637 \\ 2 I &= 237,27 \end{aligned}$$

Avec 23 degrés de liberté $\chi^2_{0,05} = 35,17$ $\chi^2_{0,01} = 41,64$ l'indépendance n'est donc pas vérifiée. Le comportement du bouleau paraît à première vue responsable de ce résultat : le pourcentage de 0 (arbres morts) qui est d'environ 50 % à la concentration de 3 % n'est plus que de 31 % à la concentration de 3,5 %. Par contre, il est plus difficile de porter un jugement sur le comportement respectif des autres essences.

Remarque :

L'hypothèse d'indépendance $H_2(E \times RC)$ exprimée par (2. 6)

(2. 6)

$$p_{ijk} = p_{.k} \cdot p_{ij.}$$

est équivalente à (*):

$$p_{1..k} = p_{..k} p_{1..} \quad \text{et} \quad p_{1jk} = p_{1j.} p_{1..k}/p_{1..}$$

soit

$$H_2(R \times E) \quad \text{et} \quad H_2(C/R \times E/R)$$

$$H_2(E \times RC) = H_2(C/R \times E/R) \cap H_2(R \times E)$$

La classification « étages » est indépendante de la classification « lignes » et « colonnes » si les classifications « lignes » et « colonnes » sont indépendantes et que les classifications « colonnes » et « étages » sont conditionnellement indépendantes, étant donné la classification par « lignes ».

Du point de vue de l'information, on obtient une nouvelle décomposition additive permettant la vérification des sous-hypothèses précédentes par le χ^2 asymptotique.

Les expressions de l'information sont respectivement:

Composantes	Information	Degrés de liberté
lignes x étages (R x E)	$2 \sum_{ik} x_{1..k} \log \frac{N x_{1..k}}{x_{1..} x_{..k}}$	$(r - 1) (d - 1)$
(Colonnes, lignes) x (étages, lignes) $H_2(C/R \times E/R)$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{\frac{x_{1j.} x_{1..k}}{x_{1..}}}$	$r(c - 1) (d - 1)$
Etage x (lignes colonnes) $H_2(E \times RC)$	$2 \sum_{ijk} \log \frac{N x_{ijk}}{x_{1j.} x_{..k}}$	$(d - 1) (rc - 1)$

Ces expressions se développent encore en facteurs de la forme $n \log n$.

On aurait pu écrire de même:

$$H_2(E \times RC) = H_2(R/C \times E/C) \cap H_2(R \times C)$$

et obtenir une analyse de l'information permettant de tester les hypothèses du second membre.

(*) Faire la sommation de p_{1jk} pour $j = 1$ à 6

2. 23 — *Comparaison de r tables de contingence à double entrée.*

Nous avons vu précédemment (paragraphe 1. 2) qu'il était possible de comparer entre eux r échantillons d'une distribution multinomiale à c classes et notamment d'en tester l'homogénéité globale. On peut étendre le test d'homogénéité aux tables de contingence à double entrée ($r \times c$).

L'analyse de l'information s'inspire de l'analyse d'une table de contingence à triple entrée mais les restrictions doivent en être modifiées.

L'hypothèse alternative est :

$$H_1 : p_{ijk} \neq p_{ij.} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots r \\ k = 1, 2 \dots d \end{array} \quad j = 1, 2 \dots c$$

$$\sum_i \sum_j p_{ijk} = 1$$

L'hypothèse nulle H_2 est au contraire :

(2. 9)

$$H_2 : p_{ijk} = p_{ij.} \quad \forall i, j \quad \sum_i \sum_j p_{ij.} = 1$$

La meilleure estimation de $p_{ij.}$ est :

$$\hat{p}_{ij.} = x_{ij.} / N$$

et l'information $\hat{I}[(p)^* : (p)]$ se décompose encore additivement selon la formule :

$$\hat{I}[(p)^* : (p)] = \hat{I}(\hat{p} : (p)) + \hat{I}[(p)^* : (\hat{p})]$$

pour donner le tableau d'analyse suivant :

Composante	Information	Degrés de liberté
$\hat{p}_{ij.} = x_{ij.} / N$	$2 \sum_{ij} x_{ij.} \log \frac{x_{ij.}}{N p_{ij.}}$	$rc - 1$
Homogénéité $2 \hat{I}(H_1 : H_2)$	$2 \sum_{ijk} \log \frac{N x_{ijk}}{x_{ij.} x_{.k}}$	$(d - 1)(rc - 1)$
Total $2 \hat{I}[(p)^* : (p)]$	$2 \sum_{ijk} x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{x_{.k} p_{ij.}}$	$r(cd - 1)$

Tableau 2.6 — Homogénéité de d échantillons $r \times c$

La composante d'homogénéité est, sous l'hypothèse nulle, asymptotiquement distribuée comme χ^2 avec $(d - 1)(rc - 1)$ degrés de liberté et on la testera au seuil de probabilité choisi. Elle s'écrit encore :

(2. 10)

$$2 \hat{I} = 2 \left(\sum_{ijk} x_{ijk} \log x_{ijk} + N \log N - \sum_{ij} x_{ij} \cdot \log x_{ij} - \sum_k x_{..k} \log x_{..k} \right)$$

Exemple d'application:

Le traitement aérien à 3 % P80 a été appliqué sur 3 parcelles différentes et contiguës qui ont fait l'objet de sondages distincts dont les résultats sont reportés sur le tableau 2. 7. On désirerait connaître si l'application a été homogène sur l'ensemble des parcelles traitées. Si l'on considère chaque relevé de parcelle comme un échantillon, l'analyse de l'information permet de contrôler l'hypothèse d'homogénéité. L'indice i étant attribué à l'essence, l'indice j à la note de résistance et l'indice k à la parcelle. On a :

$$r = 4 \qquad c = 6 \qquad d = 3$$

Traitement aérien, Mur de Sologne - Relevé des parcelles traitées à 3 %.

Parcelle	Essence	0	1	2	3	4	5	Total
C3	Bouleau	84	21	15	22	4	0	146
	Tremble	1	9	15	18	7	0	50
	Châtaignier	3	0	0	1	2	0	6
	Chêne	0	2	5	24	6	0	37
	Total	88	32	35	65	19	0	239
C3	Bouleau	73	24	15	17	0	0	129
	Tremble	19	20	29	33	3	0	104
	Châtaignier	0	1	0	4	8	6	19
	Chêne	4	3	5	9	10	0	31
	Total	96	48	49	63	21	6	283
C4	Bouleau	38	17	21	28	10	0	114
	Tremble	2	4	12	34	58	0	110
	Châtaignier	0	0	0	4	20	3	27
	Chêne	0	0	0	4	1	0	5
	Total	40	21	33	70	89	3	256

	0	1	2	3	4	5	Total
Bouleau	195	62	51	67	14	0	389
Tremble	22	33	56	85	68	0	264
Châtaignier	3	1	0	9	30	9	52
Chêne	4	5	10	37	17	0	73
Total	224	101	117	198	129	9	778

Tableau 2.7 — Totaux, ensemble des parcelles = $x_{i.}$.

Les valeurs de $x_{.,k}$ sont respectivement 239, 283, 256. Les valeurs de $x_{ij.}$ sont celles du tableau séparé et $N = 778$.

On trouve:

$$\begin{array}{rcl}
 \sum_{ijk} x_{ijk} \log x_{ijk} & 2\,515,6580 & \text{Nombre de degrés de liberté} \\
 + N \log N & + 5\,178,9332 & (d-1)(rc-1) = 2 \times 19 \\
 - \sum_k x_{..k} \log x_{..k} & - 4\,326,1017 & dl = 38 \\
 - \sum_{ij} x_{ij.} \log x_{ij.} & - 3\,239,9249 & \\
 \hline
 \hat{I} & = 128,5646 & 2\hat{I} = 257,13
 \end{array}$$

Avec 40 degrés de liberté $\chi^2_{0,05} = 55,76$ et $\chi^2_{0,01} = 63,69$. A fortiori, la valeur trouvée $2\hat{I} = 257,12$ est hautement significative: les échantillons ne sont pas homogènes et l'on peut conclure que l'application a donné, pour chaque parcelle, des effets qui ne peuvent être considérés comme identiques.

Remarque:

On notera l'identité des expressions et des degrés de liberté de la distribution asymptotique de χ^2 pour les informations permettant de tester respectivement:

- l'indépendance d'une classification par rapport aux deux autres,
- l'homogénéité de plusieurs échantillons de tables à double entrée.

En fait, les problèmes sont tout à fait différents et il en va de même des hypothèses: dans le cas de l'indépendance, les probabi-

lités « d'étage » ne sont pas identiques dans l'hypothèse nulle : on peut seulement admettre leur existence. Dans la comparaison de c échantillons, ce sont les rc probabilités p_{ij} , que l'on peut considérer comme identiques dans chacun des échantillons soumis au test lorsque celui-ci n'est pas significatif.

Formellement, les hypothèses nulles se traduisent par les formules suivantes :

$$p_{1jk} = p_{1j.} \cdot p_{..k} \quad \forall 1, j, k$$

pour l'indépendance étages $\times$ (lignes, colonnes)

$$p_{1jk} = p_{1j.} \quad \forall 1, j$$

pour l'homogénéité de r tables (lignes, colonnes).

2. 24 — Décomposition de la composante d'homogénéité.

La composante d'homogénéité ($R \times C$) peut encore se décomposer en deux facteurs additifs correspondant au fait que l'hypothèse d'homogénéité $H_2 (R \times C)$ peut être considérée comme l'intersection d'une hypothèse d'homogénéité en C et d'une hypothèse d'homogénéité conditionnelle en D liée par C .

$$H_2 (C \times D) = H_2 (C) \cap H_2 (D/C)$$

On peut tester chacun des membres de droite de cette expression par deux estimations de l'information comme on l'a fait au paragraphe 2. 22 dans la remarque qui termine ce paragraphe.

2. 25 — Homogénéité conditionnelle.

Il est encore possible, dans le cas de r échantillons de tables de contingence à double entrée de tester, par exemple pour une ligne i , l'hypothèse de l'homogénéité des échantillons relativement à la classification en colonnes.

L'hypothèse nulle H_2 est alors exprimée par :

(2. 11)

$$H_2 : p_{ijk} = p_{ij.} \quad i \text{ donné}, \quad j = 1, 2 \dots c \\ K = 1, 2 \dots d$$

$$\sum_i p_{ij.} = p_{1..}$$

l'hypothèse alternative étant

$$H_1 : p_{ijk} \neq p_{ij.} \quad \sum_k p_{ijk} = p_{ij.}$$

Le tableau d'analyse de l'information est alors le suivant :

Composante	Information	Degrés de liberté
$\beta_{1..k}/\beta_{1..} = x_{1.k}/x_{1..}$	$2 \sum_k x_{1.k} \log \frac{x_{1.k}}{x_{1..} p_{1.k}/p_{1..}}$	$d - 1$
$2 \hat{I} (H_1 : H_2)$ homogénéité interne à 1	$2 \sum_j \sum_k x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{x_{ij.} x_{i.k}/x_{1..}}$	$(c - 1) (d - 1)$
$2 \hat{I} ((p)^* : (p))$	$2 \sum_j \sum_k x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{x_{ij.} p_{1.k}/p_{1..}}$	$c(d - 1)$

Tableau 2.8 — Homogénéité conditionnelle (ligne i)

L'expression de l'information permettant le test de l'homogénéité des r échantillons de la ligne i pour la classification j , s'écrit :

(2. 12)

$$2 \hat{I} = 2 \left(\sum_{jk} x_{ijk} \log x_{ijk} + x_{1..} \log x_{1..} - \sum_j x_{ij.} \log x_{ij.} \right. \\ \left. - \sum_k x_{1.k} \log x_{1.k} \right)$$

elle tend asymptotiquement vers une distribution de χ^2 à $(c - 1) (d - 1)$ degrés de liberté.

Exemple d'application:

Supposons que nous veuillons contrôler si le bouleau a réagi de façon identique au traitement à 3 % dans les parcelles C3; G3 et

G4 (tableau 2. 7 ci-avant). On testera l'homogénéité des 3 échantillons constitués par la ligne « bouleau » ($i = 1$) par rapport à la classification « colonnes » (0 à 5).

Ici $x_{1..} = 389$

$x_{1,1} = 239$

$x_{1,2} = 283$

$x_{1,3} = 256$

Les x_{1j} sont les chiffres de la ligne « bouleau » des totaux de l'ensemble des parcelles: 195,62, ..., 14,0.

On a alors:

$\sum_{jk} x_{1jk} \log x_{1jk}$	1 395,2092	d.l. $(c - 1)(d - 1)$
$+ x_{1..} \log x_{1..}$	+ 2 319,8324	$= 5 \times 2 = 10$
$- \sum_j x_{1j.} \log x_{1j.}$	- 1 894,4490	$\chi^2_{0.05} = 18,31$
$- \sum_k x_{.1k} \log x_{.1k}$	- 1 803,3016	$\chi^2_{0.01} = 23,21$
<hr/>	<hr/>	
$\hat{I}$	= 17,2910	$2 \hat{I} = 34,58$

La valeur trouvée pour $2 \hat{I}$ est très significative. Il y a donc, dans chaque parcelle traitée, des différences de comportement du bouleau qui sont sans doute dues à un manque de régularité de l'application, les différences de station étant peu prononcées.

III — CONCLUSIONS

Nous avons voulu mettre en lumière les possibilités offertes par l'analyse de l'information pour tester un certain nombre d'hypothèses lorsqu'on se trouve confronté avec des distributions multinomiales. Le chercheur se trouvera souvent dans cette situation, notamment lorsque les caractères observés sont de nature qualitative et ne peuvent être exprimés par une ou plusieurs grandeurs mesurables. En matière forestière, cette difficulté se rencontre dans de nombreuses disciplines, chaque fois qu'il s'agit de relever des caractères phénologiques ou floristiques : précocité du débourrement, caractéristiques morphologiques d'un plant, réaction d'un arbre ou d'une souche à l'application de produits chimiques herbicides, etc... Alors l'expérimentateur se sent désarmé et tente de se raccrocher à l'analyse de variance en utilisant des expédients : il essaie successivement de multiples transformations qui, parfois, s'avèrent impuissantes et presque toujours l'embarrassent lorsqu'il doit conclure.

Il serait abusif de prétendre que l'analyse de l'information constitue toujours la seule méthode à laquelle on puisse se confier dans de telles circonstances. La méthode du test χ^2 est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en rappeler l'existence : elle peut être appliquée au test d'homogénéité d'un échantillon d'une loi binomiale ou d'indépendance d'une table de contingence à double entrée — voir, par exemple, SNEDECOR (10), chap. 9 et 16. Cependant, l'analyse de l'information nous paraît beaucoup plus féconde et plus commode d'emploi.

Sur le plan des calculs, l'analyse de l'information se présente en effet comme une suite d'additions lorsqu'on dispose d'une table de $n \log n$. Lorsque les valeurs de n sont grandes, ou que le nombre d'échantillons ou de classes est élevé, il est indiqué d'utiliser le calcul automatique : la plupart des calculatrices électroniques englobent la fonction $\log_e$ dans les fonctions standard et la programmation est très simple, surtout lorsqu'on utilise un langage symbolique comme l'Algol. Les méthodes que nous avons exposées seront toutes programmées par la Station de Biométrie et, dès lors, les calculs ne poseront aucun problème.

La décomposition des quantités d'information en termes additifs correspondant à un certain nombre de sous-hypothèses dont l'intersection constitue l'hypothèse à laquelle est attachée la quantité d'information globale est une méthode extrêmement élégante et, de surcroît, efficace. Elle n'est pas sans analogie avec l'analyse de variance et il n'y a là rien de surprenant puisque, dans l'analyse de variance, les sommes des carrés ne sont pas autre chose que des χ^2 .

Au demeurant, nous nous sommes volontairement limités, dans l'exposé des applications pratiques étayé par des exemples, au cas de la distribution multinomiale. Des développements comparables sont possibles pour la distribution de Poisson et surtout pour la distribution multinormale: ils conduisent dans ce cas à de nombreux tests d'un grand intérêt.

En définitive, l'analyse de l'information constitue une vaste synthèse qui permet d'approcher par des voies nouvelles et de retrouver la plupart des méthodes les plus connues de l'analyse statistique. Elle ne pouvait rester totalement inconnue des chercheurs qui, aujourd'hui, ont un besoin de plus en plus pressant de cet outil efficace.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARBONNIER (P.). — Premiers essais de traitement par hélicoptère pour le dégagement sélectif de plantations résineuses. Communication au 3^e Congrès International de l'Aviation Agricole, 1966.
 2. BURGHAUSEN (R.). — Statistische Auswertung von Vegetationsbeobachtungen in Feldversuchen. Internationale Tagung über mathematische Statistik und ihre Anwendungen, Berlin, 1964, pp. 43-48.
 3. DAGNELIE (P.). — A propos des transformations de variables. *Biométrie-Praximétrie*, t. IV, n° 2, 1965, pp. 59-78.
 4. DUFRENOY (J.). — Quelques méthodes statistiques utilisables en agronomie. *Cahier des Ingénieurs Agronomes*, n° 194, 1965, pp. 35-39.
 5. FISHER (R.A.) and YATES (F.). — Statistical tables for biological agricultural and medical research. Oliver and Boyd, Edinbourg, 1953.
 6. JEFFERS (J.N.R.). — Experimental design and analysis in Forest Research. Chap. 3. Almqvist et Wiksell, Stockholm, 1959.
 7. KENDALL (M.G.) and STUART (A.). — The advanced theory of Statistics, 3 vol. Charles Griffin et C^o, Londres, 1958.
 8. KULLBACK (S.). — Information theory and statistics, 395 p., John Wiley and Sons, New-York, 1959.
 9. RIVES (M.). — Sur l'analyse de la variance. I. Emploi de transformations. *Annales de l'Institut National de la Recherche Agronomique*, Série B, 10 - 3, 1960.
 10. SNEDECOR (G.W.). — Statistical methods, 5^e éd., 534 p. The Iowa University Press, Ames, 1956.
 11. TORTRAT (A.). — Calcul des probabilités, 168 p. Masson et Cie, Paris, 1963.
 12. VESSEREAU (A.). — Méthodes statistiques en biologie et en agronomie, 2^e éd., 538 p., J.B. Bailliére et fils, Paris, 1960.
 13. YAGLOM (A.M.) et YAGLOM (J.M.). — Probabilité et information, 175 p. Dunod, Paris, 1959.
-

TABLE DES VALEURS DE $n \log n$

N	N*LN(N)	N	N*LN(N)	N	N*LN(N)	N	N*LN(N)	N	N*LN(N)
1	.0000	21	63.9350	41	152.2565	61	250.7633	81	355.9504
2	1.3863	22	68.0029	42	156.9821	62	255.8823	82	361.3510
3	3.2958	23	72.1164	43	161.7316	63	261.0175	83	366.7638
4	5.5452	24	76.2733	44	166.5043	64	266.1685	84	372.1886
5	8.0472	25	80.4719	45	171.2998	65	271.3352	85	377.6254
6	10.7506	26	84.7105	46	176.1175	66	276.5172	86	383.0739
7	13.6214	27	88.9876	47	180.9569	67	281.7144	87	388.5340
8	16.6355	28	93.3017	48	185.8176	68	286.9265	88	394.0056
9	19.7750	29	97.6516	49	190.6992	69	292.1533	89	399.4886
10	23.0259	30	102.0359	50	195.6012	70	297.3947	90	404.9829
11	26.3768	31	106.4536	51	200.5231	71	302.6503	91	410.4882
12	29.8189	32	110.9035	52	205.4647	72	307.9200	92	416.0046
13	33.3443	33	115.3847	53	210.4255	73	313.2035	93	421.5318
14	36.9468	34	119.8963	54	215.4051	74	318.5008	94	427.0697
15	40.6208	35	124.4372	55	220.4033	75	323.8116	95	432.6183
16	44.3614	36	129.0067	56	225.4197	76	329.1357	96	438.1774
17	48.1646	37	133.6040	57	230.4539	77	334.4730	97	443.7470
18	52.0267	38	138.2283	58	235.5057	78	339.8233	98	449.3268
19	55.9443	39	142.8789	59	240.5747	79	345.1864	99	454.9169
20	59.9146	40	147.5552	60	245.6607	80	350.5621	100	460.5170

101	466.1272	121	580.2907	141	697.7751	161	818.1061	181	940.9280
102	471.7472	122	586.0906	142	703.7274	162	824.1906	182	947.1292
103	477.3771	123	591.8987	143	709.6868	163	830.2813	183	953.3360
104	483.0167	124	597.7149	144	715.6531	164	836.3781	184	959.5482
105	488.6658	125	603.5392	145	721.6264	165	842.4810	185	965.7658
106	494.3245	126	609.3715	146	727.6066	166	848.5900	186	971.9889
107	499.9927	127	615.2118	147	733.5936	167	854.7050	187	978.2173
108	505.6702	128	621.0599	148	739.5874	168	860.8260	188	984.4511
109	511.3569	129	626.9158	149	745.5880	169	866.9529	189	990.6902
110	517.0528	130	632.7795	150	751.5953	170	873.0857	190	996.9346
111	522.7579	131	638.6508	151	757.6093	171	879.2245	191	1003.1842
112	528.4719	132	644.5299	152	763.6298	172	885.3690	192	1009.4391
113	534.1948	133	650.4164	153	769.6570	173	891.5194	193	1015.6992
114	539.9266	134	656.3105	154	775.6907	174	897.6756	194	1021.9645
115	545.6672	135	662.2121	155	781.7309	175	903.8375	195	1028.2349
116	551.4165	136	668.1211	156	787.7775	176	910.0052	196	1034.5105
117	557.1743	137	674.0374	157	793.8306	177	916.1785	197	1040.7911
118	562.9408	138	679.9610	158	799.8900	178	922.3575	198	1047.0769
119	568.7157	139	685.8919	159	805.9558	179	928.5421	199	1053.3677
120	574.4990	140	691.8299	160	812.0278	180	934.7322	200	1059.6635

RÉSUMÉ

En expérimentation forestière — et dans bien d'autres domaines de la recherche — il n'est pas toujours possible de recueillir les résultats de l'expérimentation sous forme de données quantitatives. Dans ce cas, l'interprétation des résultats expérimentaux par des méthodes qui font appel à l'analyse de variance devient délicate, parfois même impossible en dépit d'artifices classiques tels que la transformation des variables. Pour combler cette lacune, il existe différentes méthodes théoriquement éprouvées mais plus ou moins méconnues des chercheurs qui n'y font que rarement appel. Cet article se propose d'attirer l'attention sur les nombreuses possibilités offertes par l'analyse de l'information — plus spécialement de l'estimation de l'information minima de discrimination — en se limitant à ses applications au cas de la distribution multinomiale, y compris les tables de contingence.

Un certain nombre de résultats mathématiques sont rappelés dans la première partie consacrée à un aperçu théorique sur l'information, l'information minima de discrimination et son estimation. L'intérêt de celle-ci réside dans sa convergence asymptotique à la loi de χ^2 dans l'hypothèse nulle.

La seconde partie est consacrée à la comparaison d'échantillons de lois multinomiales — tableaux de fréquences observées — et à l'étude de deux ou plusieurs échantillons, analyse progressive, homogénéité de groupes d'échantillons, test d'indépendance ou d'homogénéité sur les tables de contingence. La plupart des tests sont illustrés par des exemples tirés des dossiers de la Station de Biométrie: ces exemples ont pour but de montrer qu'en dépit d'une complexité formelle apparente les calculs nécessités par l'utilisation de ces tests sont extrêmement simples et peuvent être réalisés sur la plus simple des machines de bureau dès lors qu'on dispose d'une table numérique de la fonction $n \log n$. Une telle table (à 4 décimales) calculée sur l'ordinateur de l'Université de Nancy pour $n \leq 200$ figure en annexe et devrait, dans nombre de cas, s'avérer suffisante.

Comme la somme des carrés dans l'analyse de variance, l'estimation de l'information est susceptible d'être décomposée en éléments additifs qui correspondent à différentes sous-hypothèses dont

l'intersection constitue l'hypothèse globale. Comme telle, elle est intellectuellement très séduisante et il a paru utile de la faire connaître davantage des chercheurs dans la mesure où elle permet de combler les lacunes d'autres méthodes, parfois utilisées avec une confiance excessive. La théorie de l'information est par ailleurs applicable à bien d'autres lois que la loi multinomiale, notamment à la loi multinormale où elle a donné lieu à d'importants développements.

SUMMARY

In forest research — and in many other research fields — it is not always possible to collect the experiment results in the form of quantitative data. For that ground it is difficult, sometimes impossible, in spite of usual expedients such as the transformation of variables, to interpret the experiment results by means of methods which involve analysis of variance. In order to supply this deficiency several methods have been theoretically worked out but these are more or less known to the research workers who use them very seldom. In this paper, we intend to draw attention to the numerous possibilities offered by the analysis of information statistics — especially the minimum discrimination information — limiting the field of its application to the case of multinomial distribution.

The first part deals with the theoretical aspects of information, the minimum discrimination information and its estimate, and presents some mathematical results. The asymptotic convergence to the χ^2 distribution in the null hypothesis is a most interesting property of the later statistic.

In the second part are compared samples of multinomial distributions — tables of observed frequencies — it deals further with the comparison of two or several samples, the successive partition of a set of samples, the homogeneity tests between sets of samples, the independence or homogeneity tests for contingency tables. Most tests are exemplified by datas taken out of documents of the Biometry Station: these examples are intended to show that, in spite of an apparent formal complexity, the calculations needed to apply the tests are most simple, and can be carried out with the most common desk machines, since numerical tables of the $n \log n$ function are available. Such a table (with 4 decimals), calculated with the computer of the University of Nancy for $n \leq 200$, is given in an appendix, and in many cases should be sufficient.

As also the sum of squares in variance analysis, the information statistic can be split into additive elements, which correspond to different sub-hypothesis, the intersection of which expresses the whole hypothesis. Just as it is, it is intellectually attractive and it has been thought useful to make it known to research workers in

so far as it enables to supply the deficiencies of other methods, sometimes considered as most reliable ones. The information theory is besides suitable to many others distributions than the multinomial especially to the multinormal, where it led to important developments.

ZUSAMMENFASSUNG

In der forstlichen Forschung und auch auf vielen anderen Forschungsgebieten ist es nicht immer möglich die Versuchsergebnisse in der Form quantitativer Daten zu sammeln. In diesem Falle wird die Interpretation von Versuchsergebnissen, die mit Methoden der Varianzanalyse gewonnen werden delikate, manchmal aber auch unmöglich, trotz Anwendung klassischer Kunstgriffe wie zum Beispiel die Transformation der Variablen. Um diese Lücke zu schliessen gibt es verschiedene theoretisch erprobte Methoden, die den Forschern jedoch meist mehr oder weniger bekannt sind und daher selten angewandt werden. Die vorliegende Arbeit möchte die Aufmerksamkeit auf die zahlreichen Möglichkeiten der Informationsanalyse lenken — insbesondere auf die Schätzung der Minimalinformation der Trennung wobei jedoch die Anwendung auf Fälle der multinomialen Verteilung — die Kontingenztafeln inbegriffen — beschränkt wird.

Im ersten Teil werden eine gewisse Anzahl von mathematischen Ergebnissen in Erinnerung gerufen und eine kurze theoretische Darstellung erläutert die Begriffe Information, Minimalinformation der Trennung und seine Schätzung. Die Bedeutung der Minimalinformation der Trennung liegt in ihrer asymptotischen Konvergenz mit der χ^2 Verteilung bei Zugrundelegung der Nullhypothese.

Der zweite Teil behandelt den Vergleich von Stichproben multinomialer Verteilungen, — Tabellen der beobachteten Häufigkeiten — die Untersuchung zweier oder mehrerer Stichproben, die progressive Analyse, die Homogenität von Gruppen von Stichproben, sowie die Prüfung der Unabhängigkeit oder der Homogenität von Kontingenztafeln. Die meisten dieser Tests werden an Beispielen aus den Archiven der Station für Biometrie erläutert. Diese Beispiele sollen zeigen, dass trotz der offensichtlich komplexen Form, die zur Anwendung dieser Tests notwendigen Berechnungen äusserst einfach sind und mit jeder Bürorechenmaschine durchgeführt werden können, wenn eine numerische Tafel der Funktion $n \log n$ zur Verfügung steht. Eine solche Tafel mit 4 Dezimalen wurde auf einem Elektronenrechner der Universität Nancy für $n \leq 200$ berechnet und im Anhang beigegeben. Die Tafel dürfte sich in vielen Fällen als ausreichend erweisen.

Ebenso wie die Summe der Quadrate bei der Varianzanalyse, eignet sich auch der Schätzwert der Information für eine Zerlegung in additive Elemente die bestimmten Subhypothesen entsprechen und deren Intersektion die Globalhypothese darstellt. Als solcher ist der Schätzwert der Information, intellektuell gesehen als sehr verlockend zu betrachten und es erschien zweckmässig, die Forscher näher damit bekannt zu machen. Dies gilt vor allem für jene Fälle, wo der Schätzwert der Information es ermöglicht andere Methoden zu vervollständigen, die oftmals mit einem zu grossen Vertrauen angewendet werden. Die Theorie der Information ist im Übrigen neben der multinomialen Verteilung auch auf eine Anzahl anderer Verteilungen anwendbar, vor allem auf die multinormale Verteilung, wo sie eine bedeutende Entwicklung ermöglichte.