CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU ROUGE CRYPTOGRAMIQUE DU PIN SYLVESTRE DÛ AU *LOPHODERMIIUM PINASTRI* (SCHRAD.) CHEV. DISSÉMINATION DES SPORES (1)

L. LANIER, C. ZELLER et Florence ZELLER

Laboratoire de Pathologie et Station de Biométrie
Centre national de Recherches forestières, 54 - Nancy
Institut national de la Recherche agronomique

Laboratoire de Minéralogie et Cristallographie
94, avenue Maréchal de Lattre-de-Tassigny, 54 - Nancy

SOMMAIRE

Les nécessités d'une étude sur la vitesse de chute des ascospores du *Lophodermium pinastri* ont conduit à un calcul théorique des vitesses en fonction des dimensions des spores, dans les cas où leur forme permet de les assimiler à des cylindres ou à des ellipsoïdes.

Des exemples d'utilisation de ces données sont présentés. Dans le cas du *Lophodermium pinastri*, ces applications permettent des recoupements avec certaines observations faites dans la nature.

Pour d'autres spores de champignons, les valeurs théoriques cadrent convenablement avec les données d'observation.

INTRODUCTION - REVUE DE LA LITTÉRATURE - POSITION DU PROBLÈME

L'étude approfondie d'une maladie cryptogamique comporte une investigation poussée sur les moyens de dissémination du parasite en cause. En effet, pour passer d'une plante malade où il est établi à une plante saine sur laquelle il doit s'implanter, le parasite court un risque, subit une « crise » d'autant plus sérieuse que le passage se fait fréquemment par voie aérienne, sous forme de spores, « au hasard ». Ce gaspillage obligatoire de millions de spores perdues, atterrissant sur des hôtes inadaptés, des substrats inertes ou dans des conditions incompatibles avec leur germination explique et justifie l'une des caractéristiques les plus évidentes, commune à la majorité des parasites, à savoir le nombre énorme de leurs spores. Pourtant, certaines parmi ces

(1) Ce travail recouvre en partie une thèse qui a été soutenue le 22 décembre 1969, à Nancy, enregistrée sous le n° AO-3586, auprès du Centre national de la Recherche scientifique.

spores vont « réussir » et le rôle du pathologiste consistera à savoir comment et pourquoi, dans le but évident de les en empêcher.

Le problème de la dissémination des spores aériennes a fait l'objet de nombreux travaux depuis ceux du pionnier que fut BULLER (BULLER, 1909) et le lecteur pourra trouver dans les ouvrages de GREGORY (GREGORY, 1961), d'INGOLD (INGOLD, 1960, 1967) ou de SCHRÖDTER (SCHRÖDTER, 1960) l'essentiel de la littérature consacrée à cette question.

Il y trouvera relatées les performances accomplies par l'Ascomycète *Podospora fimicola* qui projette ses ascospores jusqu'à cinquante centimètres (INGOLD, 1967). Dans le même ouvrage et d'un intérêt plus direct dans notre cas, INGOLD étudie le cas du *Trichoglossum hirsutum* dont les spores filiformes s'apparentent à celles du *Lophodermium pinastri*.

La dissémination de ce dernier a été relativement peu étudiée sauf par RACK (RACK, 1961) qui récolte des spores sur des lames porte-objet vaselinées, dans une tuve qui s'oriente face au vent. CHWALINSKI (1967) fixe des lames porte-objet dans différentes positions en hauteur et par rapport aux points cardinaux. RACK (1959) complète notre information par des études sur les charges électriques portées par les spores, charges qui s'inversent d'ailleurs après la sortie de l'asque pendant la période de sustentation, ce qui, d'après l'auteur, favoriserait l'atterrissage sur les aiguilles des pins. On ne trouve pourtant aucune étude complète sur les trois phases fondamentales qui commandent le passage du parasite sous la forme d'ascospore d'une aiguille malade à une aiguille saine, à savoir :

— La phase de libération, dans notre cas avec les conditions et les modalités de sortie de l'asque.

— La phase de dissémination qui nous retiendra quelque peu, car elle a pu être traitée à la fois de façon théorique et expérimentale. Les résultats obtenus permettront de recouper certaines observations antérieurement connues et d'amorcer des études plus générales.

— La phase d'« atterrissage » sur une aiguille.

Nous nous proposons d'exposer ici les travaux conduits dans l'étude des deux premières phases.

I. — LIBERATION DES SPORES DU *LOPHODERMUM PINASTRI*

Comme dans le cas du *Trichoglossum hirsutum*, l'ascospore du *Lophodermium* s'engage dans le pore de l'asque en le bouchant, certaines coupes montrant d'ailleurs (figure 1) des ascospores partiellement engagées par leur partie arrondie. La spore poussée par la pression interne de l'asque gorgé d'eau, pressé latéralement par les paraphyses, prend de la vitesse et s'échappe d'autant plus vite que sa gaine mucilagineuse assure la lubrification. Une spore en attente s'engage immédiatement derrière.

Nous avons une idée — obtenue par voie expérimentale — de la distance d'éjaculation verticale. En disposant au-dessus d'apothécies mûres des lames à des distances croissantes et en profitant du caractère adhésif de la gaine des ascospores, on peut

FIG. 1. — *Ascospore* (flèche) partiellement engagée à la sortie de l'asque ($\times 1.100$ contraste-immersion)

FIG. 2. — Eclairage rasant sur une hystérothécie. Les points brillants sont les sommets des asques (flèche)

estimer la distance à partir de laquelle on ne récolte plus que quelques rares ascospores. Cette distance est d'environ 3 millimètres.

L'observation à la loupe binoculaire permet de rattacher la décharge de la bouffée de spores à des causes naturelles reproductibles. Lorsque l'hystérothécie est abondamment humectée, les asques dépassent par leur quart supérieur le niveau de l'hyménium, ce qui s'observe en tangente ou par un éclairage rasant et à fort grossissement (figure 2). La surface de l'hyménium apparaît comme rugueuse, hérissée de points brillants, qui sont les sommets des asques. Un faisceau lumineux, un mouvement de

FIG. 3. — *Hystérothécie* couverte d'un film liquide

l'air, par exemple, par ouverture de la boîte de Pétri où les aiguilles sont humectées, une pression latérale sur les parois rigides de l'hystérothécie entraînent l'évacuation des spores. Cette dernière méthode montrera son intérêt dans la deuxième partie.

En dehors de ce procédé classique chez de nombreux Ascomycètes à spores filiformes (*Trichoglossum hirsutum*, *Cordyceps militaris*, *Leptosphaeria acuta*) pour évacuer leurs ascospores « sèches » en bouffées, le *Lophodermium pinastri* peut adopter un autre processus. L'hyménium gorgé d'eau apparaît parfois surmonté d'une couche liquide tapissant le réceptacle naviculaire constitué par l'hystérothécie en cupule (figure 3). Une partie des spores est libérée dans cette eau et une goutte de pluie tombant violemment dans cette petite coupe rebondit en éclatant et éclabousse la végétation environnante de fines gouttelettes emportant les spores. Ce phénomène du « splashing » ou éclaboussement a été étudié expérimentalement (GREGORY *et al.*, 1959). INGOLD (1960) donne une idée de l'importance que peut revêtir le phénomène en rappelant qu'une goutte d'eau de 5 millimètres tombant de 7,4 mètres se résout en 5.000

gouttelettes, dont la taille varie de 5 à 2.400 μ et pouvant être projetées sur des distances horizontales de 20 centimètres.

Ce type de dispersion existe à coup sûr chez le *Lophodermium pinastri*, ainsi que le montrent les deux expériences suivantes :

— Pour les besoins de l'expérimentation sur les spores, des gouttelettes du liquide surnageant au-dessus de l'hyménium des hystérothécies sont prélevées à la micropipette. Portées sous le microscope, elles montrent des quantités parfois considérables d'ascospores (figure 4).

FIG. 4. — Recueil des ascospores du film liquide

— Une goutte d'eau lâchée à l'aplomb d'une hystérothécie éclate et les gouttelettes obtenues, observées directement à travers la paroi de la boîte de Pétri, révèlent également la présence d'ascospores.

On comprend l'intérêt d'une dispersion d'ascospores enrobées d'un film liquide favorable aux germinations (LANIER, 1968).

Pourtant les spores bénéficiant du premier type de dispersion (par bouffées) seront plus facilement reprises, après franchissement de la couche d'air calme tangente au sol, par le vent, puis transportées. Les modalités de ce transport vont être examinées maintenant.

II. — DISPERSION DES SPORES ET THEORIE DU VOL

Une fois libérées dans l'air, les spores, dont les caractéristiques de poids et de forme sont connues, ne sont plus soumises qu'à des facteurs physiques externes

(température, humidité, lumière, mouvements de l'air). Les travaux de GREGORY (GREGORY, 1961) ont montré qu'une valeur fondamentale, la *vitesse-limite de chute dans l'air supposé immobile*, ne dépend que des caractéristiques de la spore et des facteurs physiques externes. Cette donnée V_L intervient comme nous le verrons dans tous les calculs théoriques de dispersion des spores.

GREGORY (*op. cit.*, 1961) dans le chapitre de son ouvrage traitant de la sédimentation dans l'air calme rappelle que deux méthodes ont été utilisées pour mesurer la vitesse-limite. La plus simple, employée par BULLER (BULLER, 1909) et par YARDWOOD et HAZEN (YARDWOOD et HAZEN, 1942) consiste à mesurer le temps de chute sur une courte distance à l'aide d'un microscope horizontal. La précision est fonction du champ du microscope et de la vitesse de chute elle-même, cette méthode ne conduisant à une erreur relative supportable que pour des vitesses de chute faibles, donc pour des spores de petite dimension.

La seconde méthode, largement utilisée, consiste à lâcher des spores (ou du pollen) en haut d'une colonne d'air calme dans un cylindre vertical et à déterminer le temps nécessaire pour que les propagules parviennent en bas.

2.1. — Matériel et méthodes de mesure directe

Nous avons pu utiliser les deux méthodes, compte tenu des caractéristiques favorables de notre matériel : la taille d'abord (de l'ordre du $1/10^{\circ}$ de millimètre en longueur) permet de voir aisément les spores, même au faible grossissement d'une loupe binoculaire, à condition de disposer d'un éclairage suffisamment puissant et d'observer sur fond noir. La forme effilée, qui complique les calculs théoriques, a en revanche l'avantage de ralentir la vitesse de chute.

Les essais préliminaires, permettant de distinguer les spores dans leur chute et leur position dans l'air, nous ont incité à mesurer la vitesse de chute dans un champ de loupe binoculaire, moyennant certaines précautions (1^{re} méthode). Il suffit de mesurer au chronographe le temps nécessaire pour traverser le champ de la loupe, au voisinage du diamètre vertical. Les spores passant à droite et à gauche servent de repère au nuage.

Une autre propriété très précieuse des fructifications, à savoir la possibilité pour l'expérimentateur de provoquer mécaniquement la dispersion d'une bouffée d'ascospores (figure 5), permet de donner avec une bonne précision le signal du départ au sommet du tube (2^e méthode).

La lecture de GREGORY (*op. cit.* 1961) nous ayant fait craindre les causes d'erreurs dues aux courants de convection dans des cylindres ouverts, nous avons choisi le simple tube à essai, dans lequel de la fumée introduite montre une grande stabilité de l'air intérieur. Même en agitant le tube en tous sens, la fumée s'y maintient et l'expérience a montré qu'un tube rempli de fumée abandonné à lui-même la conserve plusieurs minutes en équilibre.

Une règle graduée introduite dans le tube permet de connaître exactement sa longueur et le niveau des mesures. Le signal de départ est donné par un premier opérateur qui presse brièvement les parois d'une hystérothécie « préparée ». Une bouffée de spores est évacuée. Elles transitent t secondes plus tard devant le second opérateur muni d'un chronomètre et donnant une série de signaux d'arrivée.

2.2. — Résultats

Plusieurs centaines de mesures ont été faites par différents observateurs, afin d'éliminer tout coefficient personnel. On a également éliminé les mesures de vitesse des agrégats de spores ou même d'asques entiers, facilement visibles.

Les chiffres s'accordent autour d'une vitesse moyenne de 0,43 centimètres par seconde avec un histogramme des fréquences observées reporté sur la figure 6.

FIG. 5. — *Commande mécanique de la dispersion des ascospores*

FIG. 6. — *Correspondance entre les vitesses de chute calculées (courbe en trait plein) et observées (histogramme des fréquences et moyenne $\bar{v}$)*

On peut noter également que les spores tombent avec leur grand axe horizontal, ce qui est en accord avec les lois de la dynamique des fluides, qui veulent qu'un corps s'oriente de façon à présenter la résistance maximum au mouvement (feuille de papier dans l'air par exemple). Certaines spores pivotent parfois lentement autour d'un axe vertical à la façon d'une pale d'hélicoptère. Ce phénomène affectant 20 à 25 % des spores doit être de peu d'influence sur la vitesse de chute puisque ces spores font en moyenne 1 tour pour 2 centimètres de chute.

2.3. — *Solution théorique*

Nous avons cherché à élaborer une solution théorique à ce problème, beaucoup plus intéressante parce que de portée plus générale et susceptible d'être appliquée à de nombreux cas difficiles de spores filiformes. Nous avons tenu compte des données physiques relatives à la spore et au milieu dans lequel elle évolue. Nous nous sommes contenté d'approximations quand certaines données étaient inconnues ou inaccessibles.

Rappelons d'abord les données théoriques physiques de la sédimentation en air calme : l'air est visqueux, c'est-à-dire qu'il oppose une résistance au mouvement des particules solides. Par ailleurs, l'effet de la gravitation sur une particule consiste à l'accélérer si par exemple elle est abandonnée avec une vitesse nulle, jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse telle que le ralentissement dû à l'air qui la cerne équilibre la force de gravitation. On dit qu'elle a atteint sa vitesse-limite. Il en est d'ailleurs de même si la particule est lancée avec une vitesse-supérieure à la vitesse-limite, auquel cas elle sera décélérée jusqu'à la même limite.

Dans le cas simple de la sphère, la vitesse-limite se déduit de l'expression de la force de freinage s'exerçant sur de petites sphères (diamètre compris entre 1 et 100 μ) qui est une application de la loi de NAVIER-STOKES :

$$F = 6 \pi \mu r V \text{ en dynes}$$

où V est exprimé en centimètres par seconde :

μ » la viscosité de l'air,

r » le rayon de la sphère en centimètres.

Rappelons que la loi de STOKES s'applique, ainsi que le note CHAMBERLAIN (CHAMBERLAIN, 1967) à condition :

1) que la particule soit *grande* par comparaison avec la particule en course libre (0,1 μ : aérosol), ce qui est le cas pour la majorité des spores de champignon, dont les dimensions sont de l'ordre de 10 μ ;

2) que le nombre de REYNOLDS $R_e = \frac{2 r V}{\nu}$ soit plus petit que 1, où ν représente la viscosité cinématique, trouvée en divisant la viscosité du milieu μ par sa densité, ρ .

Par exemple pour une particule sphérique de 40 μ de diamètre, tombant à sa vitesse-limite de 5 cm/s, $R_e = 0,13$; d'une façon générale cette seconde condition, compte tenu des très faibles valeurs de r et de V , est vérifiée pour les spores de champignon et les pollens.

On trouve la vitesse-limite en égalant cette force de freinage à la force due à la gravitation.

$$6 \pi \mu r V_L = \frac{4}{3} \pi r^3 (\varrho_s - \varrho_a) g$$

d'où
$$V_L = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\varrho_s - \varrho_a}{\mu}$$

ϱ_s densité de la particule
 ϱ_a densité de l'air
 g accélération de la pesanteur.

Cette formule s'applique dans le cas de particules sphériques et permet de calculer par exemple la vitesse du courant d'air ascensionnel nécessaire pour maintenir en suspension des spores ou des gouttelettes d'eau d'un diamètre donné.

Mais dans leur grande majorité, les spores ne sont pas sphériques ; et si des formules empiriques telles que celle de FALCK (FALCK, 1927), relative aux particules ellipsoïdes, ou des relations expérimentales, comme celle de MC CUBBIN (MC CUBBIN, 1944), semblent applicables à des cas où les spores ne diffèrent pas trop de la sphère, il en va tout autrement pour le cas des spores filiformes et GREGORY (*op. cit.*, 1961) regrette qu'on n'en sache pas davantage sur la chute des spores très allongées (*Ophiobolus*, *Epichloe*, *Geoglossum*, *Cordyceps*, ...).

La solution théorique dans le cas de l'ellipsoïde, même très allongé, et du cylindre existe pourtant. Elle part des formules classiques en dynamique des fluides (LAMB, 1916), qui supposent un certain nombre de conditions, résumées dans un compte rendu récent à l'Académie des Sciences (LANIER, ZELLER 1968).

On trouvera en annexe la partie mathématique qui n'a pas été développée ici. Elle ne présente aucune difficulté particulière, mais l'établissement des formules est long.

Pour le cas du cylindre, auquel les spores du *Lophodermium* peuvent être assimilées, la formule donnant la force de freinage s'écrit :

$$F = \frac{8 \pi \mu c V}{\frac{1}{2} - \gamma - \text{Log} \frac{aV}{4 \nu}}$$

dans laquelle μ est la viscosité de l'air

c la longueur du demi-cylindre

V la vitesse de la particule

γ la constante d'Euler = 0,5772

a le rayon de la section droite du cylindre

ν la viscosité cinématique déjà définie.

La vitesse-limite V_L est solution de l'équation obtenue en égalant la force de freinage F à la force due à la gravitation.

Le calcul théorique faisant l'objet de l'annexe montre que dans le cas du cylindre, V_L est solution de l'équation :

$$\text{Log } V_L + \frac{4 \mu}{a^2 \varrho g} V_L - \text{Log} \frac{4 \nu}{a} + \gamma - \frac{1}{2} = 0$$

où $\varrho = \varrho_s - \varrho_a$.

On néglige généralement ϱ_a densité de l'air devant ϱ_s densité de la particule.

La figure 6 représente d'une part les courbes de variation de la vitesse-limite en fonction de a qui est, suivant le cas, le rayon de la section droite du cylindre (en μ) ou

celui de la section principale d'un ellipsoïde de révolution et, d'autre part, l'histogramme des fréquences observées pour la vitesse de chute.

La moyenne observée (0,43 cm/s) correspond pour un cylindre à un rayon de 1,84 μ , ce qui cadre parfaitement avec les tailles de spores observées dans la nature.

Pour les tailles les plus courantes des spores du *Lophodermium pinastri* (4-2 μ), la figure 6 donne les vitesses correspondantes de 0,50 à 0,15 cm/s.

En revanche, la courbe de l'ellipsoïde montre immédiatement que la forme des ascospores du *Lophodermium* ne peut lui être assimilée. A noter que la courbe tracée en utilisant l'approximation de FALCK cadre assez exactement avec la courbe théorique de l'ellipsoïde.

DISCUSSION ET APPLICATIONS

Pour estimer la vitesse de chute des spores du *Lophodermium pinastri*, nous aurions pu nous borner à une mesure directe, puisque leur taille et leur vitesse le permettaient, avec une erreur d'expérience que l'on peut estimer à 5 % (erreur de chronométrage sur l'enregistrement des signaux de départ et d'arrivée, sur les courants de convection, sur les variations de taille des spores, ...).

Nous avons voulu appliquer une théorie inspirée de la physique pour montrer qu'il est possible, lorsque la forme des spores se ramène à un cas géométrique simple, de faire cadrer les résultats fournis par l'expérience avec ceux prévus par le calcul. Là aussi, certaines approximations ont été nécessaires : l'air n'est ni parfaitement homogène, ni incompressible et le mouvement n'est pas absolument permanent.

En mesurant avec précision la taille de nombreuses spores, nous avons mieux apprécié leur variation considérable, de l'ordre du simple au double en longueur. TERRIER (TERRIER, 1953) faisait remarquer à juste titre que la projection des ascospores du *Lophodermium macrosporum* sélectionnait les mûres, ce qui pouvait entraîner des erreurs en Systématique, lorsque les conditions dans lesquelles sont mesurées les spores ne sont pas indiquées avec précision.

Deux facteurs restent imprécis dans nos expériences : d'une part, la densité de la spore que pour les besoins du calcul nous avons égalée à l'unité. Elle en diffère sans doute peu, puisque l'ascospore est immédiatement issue d'une cellule gorgée d'eau, l'asque, et que, projetées dans l'eau, les spores se répartissent pour quelques-unes d'entre elles à la surface du liquide et au fond des récipients, la plus grande part restant en suspension.

D'autre part, la forme des spores dans l'air, légèrement incurvées par rapport au cylindre théorique et pivotant doucement pour certaines d'entre elles autour d'un axe vertical. Forme et rotation doivent modifier légèrement les données théoriques.

Il n'en reste pas moins que l'on peut retenir le chiffre de 0,43 cm/s ($\sigma_v = 0,11$) pour la vitesse de chute des spores du *Lophodermium pinastri* dans l'air calme, avec la certitude qu'apporte une correspondance convenable entre le calcul et l'expérience.

Nous fournissons en annexe un tableau des vitesses de chute calculées pour différents cylindres de longueur indéfinie. A noter en effet que seul le diamètre du cylindre intervient pour le calcul de sa vitesse de chute. Un « fil de la Vierge » de même diamètre qu'une spore de *Lophodermium* tombe théoriquement à la même vitesse-limite.

Les formules de l'ellipsoïde (LANIER et ZELLER, 1968) permettent de fournir les rayons équivalents de la sphère tombant à la même vitesse pour différents coefficients d'excentricité, donc de calculer les vitesses de chute théoriques, connaissant a et $K = \frac{c}{a}$

Application au cas du Lophodermium pinastri

L'article de SCHRÖDTER (SCHRÖDTER, 1960) et les différentes formules qu'il fournit permettent de calculer, connaissant V_L , certaines caractéristiques du vol des ascospores du *Lophodermium pinastri* et de les confronter avec les observations faites en nature.

Une donnée essentielle qui revient souvent dans les formules de base est le coefficient d'échange A^* , qui mesure la turbulence de l'air. La valeur de A varie considérablement en fonction de la hauteur au-dessus du sol. Presque nul (0,01 g/cm/s) dans les premiers centimètres, son ordre de grandeur passe à 1 g/cm/s de 1 à 10 mètres d'altitude et à 10 g/cm/s de 10 à 100 mètres.

Dans le cas du *Lophodermium pinastri*, nous savons que pour leur plus grande part les spores sont libérées dans les premières couches d'air de la litière, $0 < h < 0,10$ mètre ou dans les litières suspendues entre 0,10 et 1 mètre.

Les coefficients d'échange correspondants peuvent être estimés à $0,01 < A < 0,1$ au niveau des litières, et $0,1 < A < 1$ jusqu'à 1 mètre du sol.

On peut dès lors calculer, pour les vitesses de vent les plus couramment observées en forêt, et connaissant la vitesse de chute des spores dans l'air calme, des valeurs estimées de la distance de vol des spores par la formule due à SCHRÖDTER :

$$X_{km} = 0,91 \frac{A}{\varphi_a} \frac{U}{V_L^2}$$

où U est la vitesse du vent en mètres par seconde. Par exemple pour $U = 0,5$.

A	X_{km}
0,01	0,02
0,1	0,2
1	2

On retrouve donc cette donnée d'observation courante à partir d'aiguilles tombées au sol ; ce que l'on a appelé le « Rouge proche », à partir d'un peuplement adulte, ne s'exerce pas au-delà de 20 mètres, alors que le « Rouge à distance » peut s'étendre jusqu'à plusieurs kilomètres.

On peut également calculer la hauteur que peuvent atteindre les spores du *Lophodermium*, par l'effet de nappe que peut prendre le nuage infectieux. La hauteur maximum est donnée par la formule suivante, également due à SCHRÖDTER :

$$Z_{\max} = 0,2274 \frac{A}{\varphi_a} \frac{1}{V_L} \quad (\text{en mètres}).$$

* *Nota.* Le coefficient d'échange correspond à une notion simple, dont la théorie et les formulations mathématiques sont complexes. Il se définit par la quantité m (d'air et de matières en suspension) qui transite à une certaine hauteur Z à travers une surface S donnée dans l'unité de temps.

$$A = \frac{\sum m Z}{S t}$$

Elle est indépendante de la vitesse du vent.

A	$Z_{\max}$
0,01	0,045
0,1	0,45
1	4,5

Ces petits tableaux sont particulièrement intéressants. Ils corroborent certains faits d'observation, qui n'avaient pas reçu d'explication satisfaisante jusqu'à présent. On constate que l'établissement d'une attaque de « Rouge » depuis une vieille plantation jusqu'à une plus jeune va d'abord lentement : pendant un ou deux ans, la frange attaquée en bordure du vieux peuplement dépasse rarement 20 à 30 mètres. Puis, après la colonisation et la mort des jeunes plants, dont de nombreuses aiguilles rougissent puis mûrissent leurs hystérothécies en restant pendues, la dissémination se fait beaucoup plus rapidement, à une hauteur pratiquement constante d'une année sur l'autre. Puis, vers 5 à 6 ans, les pins sont suffisamment hauts pour ne perdre que leurs vieilles aiguilles, bien que le niveau d'attaque puisse atteindre encore 3 ou 4 mètres. Au stade du jeune perchis, les aiguilles du Pin sylvestre ne portent pratiquement plus d'attaques du *Lophodermium* et ce champignon est exceptionnel sur les aiguilles des arbres adultes abattus.

Ces phénomènes naturels sont confirmés par les données chiffrées ci-dessus :

Les hystérothécies mûries au sol ne peuvent disperser leurs ascospores qu'à quelques centimètres de hauteur sur une distance ne dépassant pas 20 mètres, donc n'atteignent que les très jeunes plants ou les parties basses des plantations en bordure des vieux peuplements.

Au fur et à mesure que l'attaque avance, les hystérothécies en plus grand nombre mûrissent leurs spores à une hauteur plus grande, 0,50 mètre puis 1 mètre ; les aiguilles contaminées sont stockées en litière suspendue et l'on conçoit que l'attaque maximale se développe lorsque les sources de spores sont abondantes, assez haut dans les jeunes plants et que ceux-ci, encore séparés les uns des autres, permettent au vent de circuler (distance accrue de dissémination) et aux variations thermiques d'augmenter la capacité d'échange A.

Lorsque le couvert est fermé, A et U diminuent et même si les spores se dispersent de plus haut, elles ne peuvent atteindre les plus hautes aiguilles.

Les arbres adultes ne sont que rarement atteints, car pour un arbre de 20 mètres par exemple, il faudrait un coefficient d'échange de 5 qui n'est obtenu qu'exceptionnellement.

Autres applications et usage du tableau 1

Les ouvrages de systématique utilisent classiquement la forme et la taille des spores comme éléments fondamentaux de détermination. Dans les conditions que nous avons définies, à savoir forme soit cylindrique, soit ellipsoïdale et densité unité, on peut aisément mesurer a et K , ce qui fournit immédiatement une estimation de la vitesse de

TABLEAU 1

Vitesses de chute calculées pour différents rayons a du cylindre et en fonction du demi petit axe a de l'ellipsoïde et du coefficient K (rapport des axes) pour des valeurs de K variant de 1 (Sphère) à 0,05.

$\begin{array}{c} K \\ a \end{array}$	Cylindre	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75
0,75	0,086	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008
1,00	0,142	0,012	0,012	0,013	0,013	0,014	0,015
1,25	0,210	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023
1,50	0,287	0,027	0,028	0,029	0,030	0,032	0,034
1,75	0,374	0,037	0,038	0,040	0,042	0,044	0,046
2,00	0,469	0,048	0,050	0,052	0,055	0,057	0,060
2,25	0,571	0,061	0,063	0,066	0,069	0,072	0,076
2,50	0,681	0,075	0,078	0,082	0,085	0,090	0,094
2,75	0,799	0,091	0,095	0,099	0,104	0,108	0,114
3,00	0,922	0,108	0,113	0,118	0,123	0,129	0,136
3,25	1,052	0,127	0,133	0,139	0,145	0,152	0,159
3,50	1,187	0,148	0,154	0,161	0,168	0,176	0,185
3,75	1,328	0,170	0,177	0,185	0,193	0,202	0,212
4,00	1,475	0,193	0,201	0,210	0,220	0,230	0,242
4,25	1,626	0,218	0,227	0,237	0,248	0,260	0,273
4,50	1,782	0,245	0,255	0,266	0,278	0,291	0,306
4,75	1,942	0,273	0,284	0,296	0,310	0,325	0,341
5,00	2,107	0,302	0,315	0,329	0,343	0,360	0,378
5,25	2,276	0,333	0,347	0,362	0,379	0,397	0,416
5,50	2,448	0,366	0,381	0,398	0,416	0,435	0,457
5,75	2,625	0,400	0,417	0,435	0,454	0,476	0,500
6,00	2,805	0,435	0,454	0,473	0,495	0,518	0,544
6,25	2,988	0,473	0,492	0,514	0,537	0,562	0,590
6,50	3,174	0,511	0,532	0,556	0,581	0,608	0,639
6,75	3,364	0,551	0,574	0,599	0,626	0,656	0,689
7,00	3,556	0,593	0,618	0,644	0,674	0,706	0,741
7,25	3,751	0,636	0,663	0,691	0,723	0,757	0,795
7,50	3,949	0,681	0,709	0,740	0,773	0,810	0,850
7,75	4,150	0,727	0,757	0,790	0,826	0,865	0,908
8,00	4,352	0,775	0,807	0,842	0,880	0,922	0,968
8,25	4,558	0,824	0,858	0,895	0,936	0,980	1,029
8,50	4,765	0,875	0,911	0,951	0,994	1,041	1,092
8,75	4,974	0,927	0,965	1,007	1,053	1,103	1,158
9,00	5,186	0,981	1,021	1,066	1,114	1,167	1,225
9,25	5,399	1,036	1,079	1,126	1,177	1,233	1,294
9,50	5,614	1,093	1,138	1,187	1,241	1,300	1,365
9,75	5,830	1,151	1,199	1,251	1,307	1,369	1,437
10,00	6,049	1,211	1,261	1,316	1,375	1,441	1,512
10,25	6,268	1,272	1,325	1,382	1,445	1,514	1,589
10,50	6,490	1,335	1,390	1,451	1,516	1,588	1,667
10,75	6,712	1,399	1,457	1,521	1,589	1,665	1,748
11,00	6,936	1,465	1,526	1,592	1,664	1,743	1,830
11,25	7,161	1,532	1,596	1,665	1,741	1,823	1,914
11,50	7,387	1,601	1,668	1,740	1,819	1,905	2,000
11,75	7,615	1,672	1,741	1,817	1,899	1,989	2,088
12,00	7,843	1,743	1,816	1,895	1,981	2,075	2,178

TABLEAU 1 (suite)

$\begin{matrix} \text{K} \\ a \end{matrix}$	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40
0,75	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013
1,00	0,015	0,016	0,017	0,018	0,020	0,021	0,023
1,25	0,024	0,026	0,027	0,029	0,031	0,033	0,036
1,50	0,035	0,037	0,039	0,042	0,045	0,048	0,052
1,75	0,048	0,051	0,054	0,057	0,061	0,065	0,071
2,00	0,063	0,067	0,071	0,075	0,080	0,086	0,092
2,25	0,080	0,085	0,089	0,095	0,101	0,109	0,117
2,50	0,099	0,104	0,111	0,117	0,125	0,134	0,145
2,75	0,120	0,126	0,134	0,142	0,152	0,162	0,175
3,00	0,143	0,151	0,159	0,169	0,181	0,193	0,208
3,25	0,168	0,177	0,187	0,199	0,212	0,227	0,245
3,50	0,194	0,205	0,217	0,231	0,246	0,263	0,284
3,75	0,223	0,236	0,249	0,265	0,282	0,303	0,326
4,00	0,254	0,268	0,284	0,301	0,321	0,344	0,371
4,25	0,287	0,303	0,320	0,340	0,363	0,389	0,419
4,50	0,322	0,340	0,359	0,382	0,407	0,436	0,469
4,75	0,359	0,378	0,400	0,425	0,453	0,486	0,523
5,00	0,397	0,419	0,444	0,471	0,502	0,538	0,580
5,25	0,438	0,462	0,489	0,520	0,554	0,593	0,639
5,50	0,481	0,507	0,537	0,570	0,608	0,651	0,701
5,75	0,526	0,555	0,587	0,623	0,665	0,712	0,767
6,00	0,572	0,604	0,639	0,679	0,724	0,775	0,835
6,25	0,621	0,655	0,694	0,737	0,785	0,841	0,906
6,50	0,672	0,709	0,750	0,797	0,850	0,910	0,980
6,75	0,725	0,765	0,809	0,859	0,916	0,981	1,057
7,00	0,779	0,822	0,870	0,924	0,985	1,055	1,136
7,25	0,836	0,882	0,934	0,991	1,057	1,132	1,219
7,50	0,895	0,944	0,999	1,061	1,131	1,212	1,305
7,75	0,955	1,008	1,067	1,133	1,208	1,294	1,393
8,00	1,018	1,074	1,137	1,207	1,287	1,379	1,484
8,75	1,083	1,142	1,209	1,284	1,369	1,466	1,579
8,25	1,149	1,213	1,283	1,363	1,453	1,556	1,676
8,50	1,218	1,285	1,360	1,444	1,540	1,649	1,776
9,00	1,289	1,360	1,439	1,528	1,629	1,745	1,879
9,25	1,361	1,436	1,520	1,614	1,721	1,843	1,985
9,50	1,436	1,515	1,603	1,703	1,815	1,944	2,093
9,75	1,513	1,596	1,689	1,793	1,912	2,048	2,205
10,00	1,591	1,679	1,777	1,887	2,011	2,154	2,320
10,25	1,672	1,764	1,867	1,982	2,113	2,263	2,437
10,75	1,754	1,851	1,959	2,080	2,218	2,375	2,557
10,50	1,839	1,940	2,053	2,180	2,325	2,490	2,681
11,00	1,925	2,031	2,150	2,283	2,434	2,607	2,807
11,25	2,014	2,125	2,249	2,388	2,546	2,727	2,936
11,50	2,104	2,220	2,350	2,495	2,660	2,849	3,068
11,75	2,197	2,318	2,453	2,605	2,777	2,974	3,203
12,00	2,291	2,418	2,559	2,717	2,897	3,102	3,340

TABLEAU 1 (suite)

$\begin{array}{c} \text{K} \\ \swarrow \\ a \end{array}$	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
0,75	0,014	0,015	0,030	0,019	0,021	0,025	0,032
1,00	0,025	0,027	0,017	0,033	0,038	0,045	0,058
1,25	0,039	0,042	0,047	0,053	0,060	0,071	0,090
1,75	0,056	0,061	0,068	0,076	0,087	0,102	0,130
1,50	0,077	0,084	0,092	0,103	0,118	0,140	0,177
2,00	0,100	0,109	0,121	0,135	0,154	0,183	0,232
2,25	0,127	0,139	0,153	0,171	0,196	0,231	0,293
2,50	0,157	0,207	0,189	0,212	0,242	0,285	0,362
2,75	0,190	0,171	0,229	0,256	0,293	0,345	0,439
3,00	0,226	0,247	0,272	0,305	0,348	0,411	0,522
3,25	0,265	0,290	0,320	0,358	0,409	0,483	0,613
3,50	0,308	0,336	0,371	0,415	0,474	0,560	0,711
3,75	0,353	0,386	0,426	0,477	0,544	0,643	0,816
4,00	0,402	0,439	0,485	0,542	0,619	0,732	0,929
4,25	0,454	0,496	0,547	0,612	0,699	0,826	1,048
4,50	0,509	0,556	0,613	0,687	0,784	0,926	1,175
4,75	0,567	0,619	0,684	0,765	0,874	1,032	1,310
5,00	0,628	0,686	0,757	0,848	0,968	1,143	1,451
5,25	0,693	0,757	0,835	0,935	1,067	1,261	1,600
5,50	0,760	0,830	0,917	1,026	1,172	1,383	1,756
5,75	0,831	0,908	1,002	1,121	1,281	1,512	1,919
6,00	0,905	0,988	1,091	1,221	1,394	1,647	2,090
6,25	0,982	1,072	1,184	1,325	1,513	1,787	2,268
6,50	1,062	1,160	1,280	1,433	1,636	1,933	2,453
7,00	1,145	1,251	1,381	1,545	1,765	2,084	2,645
6,75	1,232	1,345	1,485	1,662	1,898	2,241	2,845
7,25	1,321	1,443	1,593	1,783	2,036	2,404	3,052
7,50	1,414	1,545	1,705	1,908	2,179	2,573	3,266
7,75	1,510	1,649	1,820	2,037	2,327	2,747	3,487
8,00	1,609	1,757	1,940	2,171	2,479	2,928	3,716
8,25	1,711	1,869	2,063	2,309	2,637	3,113	3,952
8,50	1,816	1,984	2,190	2,451	2,799	3,305	4,195
8,75	1,925	2,102	2,321	2,597	2,966	3,502	4,445
9,00	2,036	2,224	2,455	2,748	3,138	3,705	4,703
9,25	2,151	2,350	2,593	2,902	3,315	3,914	4,968
9,50	2,269	2,478	2,736	3,062	3,496	4,129	5,240
9,75	2,390	2,611	2,881	3,225	3,683	4,349	5,519
10,00	2,514	2,746	3,031	3,392	3,874	4,575	5,806
10,25	2,641	2,885	3,185	3,564	4,070	4,806	6,100
10,50	2,772	3,028	3,342	3,740	4,271	5,044	6,401
10,75	2,905	3,174	3,503	3,920	4,477	5,287	6,710
11,00	3,042	3,323	3,668	4,105	4,688	5,535	7,025
11,25	3,182	3,476	3,836	4,294	4,903	5,790	7,348
11,50	3,325	3,632	4,009	4,487	5,124	6,050	7,679
11,75	3,471	3,792	4,185	4,684	5,349	6,316	8,016
12,00	3,620	3,955	4,365	4,885	5,579	6,588	8,361

chute. Cette vitesse est d'ailleurs une fonction linéaire de la densité, ce qui rend très simple la correction, à condition bien entendu de pouvoir mesurer cette densité.

Nous avons pu, dans les quelques cas où nous connaissions la vitesse de chute mesurée de certaines spores de forme assimilable à un ellipsoïde (GREGORY, *op. cit.*, 1961), en dressant à l'aide d'ouvrages de systématique un tableau des tailles de spores pour les espèces citées, vérifier la correspondance entre les vitesses mesurées et les vitesses calculées (tableau 2). Cette correspondance est parfois excellente. Dans d'autres cas elle est moins bonne, mais les erreurs peuvent provenir de la détermination du champignon, de l'imperfection du modèle géométrique (ellipsoïde) et de la densité des spores. L'ordre de grandeur est toujours respecté.

Dans un cas tout proche de celui du *Lophodermium pinastri*, nous extrayons d'une correspondance personnelle avec le Professeur GREGORY le chiffre de 0,13 cm/s pour les ascospores du *Rhytisma acerinum*, mesure de vitesse obtenue avec la méthode du « cascade Impactor » de MAY (MAY, 1945), qui sélectionne et récolte les spores selon leur taille et leur vitesse de chute. Si l'on se réfère à la « Rabenhorst's Kryptogamenflora », Tome III, p. 83, les tailles des ascospores cylindriques pour cette espèce sont de $60-80 \times 1,5-3 \mu$.

Le tableau 1 pour des cylindres variant de 0,75 à $1,5 \mu$ de rayon indique des vitesses théoriques de chute de 0,086 et 0,287 cm/s, ce qui encadre parfaitement la vitesse observée par GREGORY. Un histogramme des fréquences du type fourni pour le *Lophodermium* apporterait sans doute des précisions complémentaires.

TABLEAU 2

Exemple de calculs de vitesse-limite à partir des dimensions des spores et correspondances avec les vitesses observées

Espèce	a (1)	K (1)	V observée (2)	V calculée
<i>Amanita rubescens</i>	3,25	0,74	0,15	0,16
<i>Boletus badius</i>	2,25	0,33	0,11	0,13
<i>Galera tenzra</i>	3,25	0,59	0,21	0,185
<i>Marasmius oreades</i>	2,75	0,61	0,13	0,132
<i>Paxillus involutus</i>	2,75	0,61	0,11	0,132
<i>Pluteus cervinus</i>	2,25	0,81	0,067	0,071

(1) a et K sont calculés d'après les moyennes des dimensions des spores de l'espèce, indiquées par KUHNER et ROMAGNESI (Flore analytique des champignons supérieurs, Masson, 1953).

(2) Chiffres indiqués par GREGORY (1961), page 17.

CONCLUSIONS

La valeur V_L de la vitesse-limite de chute dans l'air calme des ascospores du *Lophodermium* devait être estimée pour permettre de comprendre la dissémination du « Rouge » des Pins.

Cette vitesse est de 0,43 cm/s, aux erreurs d'expérience près.

En procédant à des calculs théoriques dans le cas général des cylindres et des ellipsoïdes de révolution, nous avons établi des correspondances entre les vitesses calculées et les rares vitesses observées par diverses voies expérimentales.

Dans la mesure où les conditions définies sont respectées (régime laminaire, spores cylindriques ou ellipsoïdales, densité-unité), le problème peut être pris en sens inverse. C'est-à-dire que l'on doit pouvoir fournir une bonne approximation des vitesses-limite de chute, si l'on connaît les dimensions des spores. On doit pouvoir également, comme nous l'avons fait pour le *Lophodermium*, calculer les principales caractéristiques des vols de spores, la distance à partir d'une source, la hauteur au-dessus du sol ; on aboutira de la sorte à une meilleure connaissance de l'épidémiologie des parasites.

Reçu pour publication en avril 1969.

SUMMARY

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF *LOPHODERMIIUM PINASTRI*. DISPERSION OF THE SPORES.

After analysing the most important researches dealing with the study of the dispersion of filiform spores, the author begins with a description of his observations and experiments concerning the take-off phenomenon in the *Lophodermium pinastri* ascospores.

The second part is devoted to the flight of the ascospores studied first through direct observation of their fall in a test-tube, then through theoretical considerations by means of which the terminal velocity of their fall in still air can be calculated. The values of that terminal velocity (0,43 cm/s) are found to correspond fairly well, whether obtained by observation or by calculation.

Practical applications are then given ; on the one hand that terminal velocity can be used in formulas making it possible to estimate the distance and height of flight of the spores, as far as the *Lophodermium pinastri* is concerned.

On the other hand, on a table giving the values of the terminal velocity in terms of the sizes of the spores, it will be possible to get some results already obtained by different

On the other hand, on a table giving the values of the terminal velocity in terms of the fall of spherical, cylindrical and ellipsoidal spores can be calculated, provided their sizes were known before hand.

ZUSAMMENFASSUNG

BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG ÜBER DIE VON *LOPHODERMIIUM PINASTRI* ERZEUGTE SCHÜTTE BEI *PINUS SILVESTRIS*. AUSSCHÜTTUNG DER SPOREN.

Nach einer eingehenden Literaturstudie der wesentlichsten Arbeiten über die Ausschüttung fadenförmiger Sporen, werden vom Autor in einem ersten Abschnitt die eigenen Beobachtungen und Versuche über Phänomene der Ausschüttung der Ascosporen von *Lophodermium pinastri* beschrieben.

In einem zweiten Abschnitt wird der Flug der Ascosporen untersucht ; durch direkte Fallbeobachtungen in einem Versuchsrohr und theoretische Überlegungen konnte die Fallgeschwindigkeit in unbewegter Luft bestimmt werden. Es besteht eine gute Übereinstimmung zwischen den durch Beobachtung und Berechnung ermittelten Werten dieser Grenzgeschwindigkeit (0,43 m/s).

Im folgenden werden einige Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt, insbesondere die Verwendung der Grenzgeschwindigkeit in Formeln zur Berechnung der Flugweite und Flughöhe der Sporen von *Lophodermium pinastri*.

Eine Tabelle der Grenzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Sporengrösse erbrachte gleichfalls eine Übereinstimmung mit Ergebnissen von verschiedenen Autoren. Es erscheint daher möglich, unter bestimmten Bedingungen, die Grenzfallgeschwindigkeit von kugel-, zylinder- und eiförmigen Sporen mit Hilfe ihrer Abmessungen zu berechnen.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BULLER A. H. R., 1909. Researches on fungi. Longmans, London, vol. I, 1-287.
- CHAMBERLAIN A. C., 1967. Deposition of particles to natural surfaces. In GREGORY and MONTEITH, *Airborne microbes*, Cambridge University Press, p. 139.
- CHWALINSKI K., 1967. Observations sur la biologie et la lutte contre le *Lophodermium pinastri* (Schr.) Chevall. en 1963 (en pol.) *Posnan. Tow. Przyj. Nauk Prace Komis: Nauk Roln: Lesn.*, **21**, 2, 377-397.
- FALCK R., 1927. Über die Grössen, Fallgeschwindigkeiten und Schwebewerte der Pilzsporen und ihre Gruppierung mit Bezug auf die zu ihrer Verbreitung nötigen Temperaturströmungs Geschwindigkeiten. *Ber deutsch. Bot. Ges.*, **45**, 262-281.
- FAVRE H., 1949. *Cours de Mécanique*. Leemann éd., Zürich, vol. III, 1-476.
- GREGORY P. H., GUTHRIE E. J., BUNCE M. E., 1959. Experiments of splash dispersal of fungous spores, *J. gen. Microbiol.*, **29**, 328-354.
- GREGORY P. H., 1961. — *The microbiology of the atmosphere*. Leonard Hill Books Ltd, London, 252 pp.
- INGOLD C. I., 1960. Dispersal by air and water. The take-off. In HORSFALL and DIMOND, *Plant Pathology*, vol. 3, p. 161.
- INGOLD C. I., 1967. Liberation mechanisms of fungi, In GREGORY and MONTEITH, *Airborne microbes*, Cambridge University Press, 102-115.
- LAMB H., 1916. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, chap. 11 : Viscosity.
- LANIER L., 1968. Contribution à l'étude du Rouge cryptogamique du Pin sylvestre dû au *Lophodermium pinastri* (Schr.) Chev. Germination des ascospores. *Ann. Sci. forest.*, **25**, 2, 69-81.
- LANIER L., ZELLER C., 1968. Sur l'épidémiologie des spores filiformes : vitesse de chute des ascospores du *Lophodermium pinastri* (Schr.) Chev. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, **267**, 1574-1577.
- MC CUBBIN W. A., 1944. Relation of spore dimensions to their rate of fall. *Phytopathology*, **34**, 230-234.
- MAY K. R., 1945. The cascade impactor : an instrument for sampling coarse aerosols. *J. Sci. Instrum.*, **22**, 187-195.
- RACK K., 1959. Untersuchungen über die elektrostatische Ladung der *Lophodermium*-Sporen. *Phytopathol. Z.*, **35**, 439-444.
- RACK K., 1961. Neue Beobachtungen über den Entwicklungsgang der Kiefernscütte. *Forst-u. Holzw.*, **16**, 11, 241-244.
- RAYLEIGH, 1893. On the flow of viscous fluids, especially in two dimensions. *Phil. Mag.*, **36**, 354.
- TERRIER C., 1953. Note sur *Lophodermium macrosporum* (Hartig) Rehm. *Phytopathol. Z.*, **20**, 4, 397-404.
- SCHRÖDTER H., 1960. Dispersal by air and water. The flight and landing. In HORSFALL and DIMOND, *Plant. Pathology*, vol. 3, p. 169.
- YARDWOOD C. E., HAZEN W. E., 1942. Vertical orientation of powdery mildew conidia during fall, *Science*, **96**, 316-317.

ANNEXE

ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE
DONNANT LA VITESSE-LIMITE DE CHUTE
DANS LE CAS DU CYLINDRE

Généralités

Rappelons tout d'abord les équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. En un point M de l'espace et au temps t , soit $\mathbf{V}(M, t)$ la vitesse, $\Gamma(M, t)$ l'accélération, $p(M, t)$ la pression et $\mathbf{F}(M)$ la force extérieure rapportée à l'unité de masse. Nous désignons par μ le coefficient de viscosité, par ρ la masse spécifique et par $\nu = \mu/\rho$ le coefficient de viscosité cinématique du fluide; ces trois quantités sont des constantes.

Les équations du mouvement, ou équations de Navier-Stokes, s'écrivent sous forme vectorielle :

$$(1) \quad \vec{\mathbf{F}} - \vec{\Gamma} = \text{grad } \frac{p}{\rho} - \nu \Delta \vec{\mathbf{V}}$$

A cette équation, il faut joindre la condition de continuité qui se traduit par :

$$(2) \quad \text{div } \vec{\mathbf{V}} = 0$$

1. — *Mouvement permanent plan*

Le mouvement est permanent, c'est-à-dire indépendant du temps. Dans ce cas, $\Gamma = 0$. Dans le mouvement plan, on suppose que les trajectoires se trouvent dans des plans parallèles au plan xoy et que les composantes de la vitesse ne dépendent pas de z . En coordonnée cartésienne rectangulaire, ces composantes sont donc de la forme

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de continuité s'écrit ici

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Il existe donc une fonction potentielle $\Phi(x, y)$ (donc $\Delta \Phi = 0$) telle que

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \Delta u &= \Delta v = 0 \end{aligned} \right.$$

Cette solution (u, v) est une solution particulière de l'équation (1).

2. — *Détermination de la pression*

Pour déterminer la pression, nous suivrons la méthode d'Oseen (Lamb, 1916), Remplaçons la composante u de la vitesse suivant l'axe des x par $U + u$ où U est la vitesse du fluide à l'infini. La force massique est :

$$(6) \quad \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} -U \frac{\partial u}{\partial x} \\ -U \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Compte tenu de (5) et (6), il est possible de calculer la pression. En effet (1) devient :

$$(7) \quad \begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\Delta u = \Delta v = 0$

En remplaçant u par $-\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et v par $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ (7) devient

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

D'où, en intégrant :

$$(8) \quad p = \varphi U \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

3. — Solution générale de (1) pour le cylindre

La solution générale de (1) est alors :

$$(9) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + u' \\ v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + v' \end{aligned}$$

Tenant compte des équations (5), (6), (8), l'équation (1) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{U} \Delta u' - \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\nu}{U} \Delta v' - \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

ou, en posant $2k = \frac{U}{\nu}$

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta u' - 2k \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 \\ \Delta v' - 2k \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Si γ est une fonction solution de l'équation (10)

$$(11) \quad \Delta \gamma - 2k \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$$

on voit que

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \gamma \\ v' &= \frac{1}{2k} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \end{aligned}$$

sont des solutions de (10) qui vérifient l'équation de continuité (4)

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$$

L'équation (11) a pour solution

$$\chi(x, y) = C e^{kx} K_0(k, r) \text{ où } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$K_0(k, r)$ étant la fonction de Bessel modifiée définie par :

$$K_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh \omega} d\omega$$

A partir d'un développement de χ lorsque $k.r$ est petit, nous obtenons :

$$(12) \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi = -\frac{C}{2k} \left[k \left(\frac{1}{2} - \gamma - \log \frac{1}{2} kr \right) + \frac{\partial}{\partial x} \log r - \frac{1}{2} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r + \dots \right] \\ v' = \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{C}{2k} \left[\frac{\partial}{\partial y} \log r - \frac{1}{2} kr^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log r + \dots \right] \end{cases}$$

en nous limitant au second ordre. γ est la constante d'Euler.

D'autre part, les fonctions $\log r$, $\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \log r$ sont des solutions de $\Delta \Phi = 0$, quels que soient p et q .

Nous pouvons donc prendre pour Φ :

$$\Phi = A_0 \log r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \log r + \dots$$

Pour le cylindre, les conditions

$$u = -U \quad v = 0 \quad w = 0$$

doivent être vérifiées pour $r = a$, d'où

$$C = \frac{2U}{\frac{1}{2} - \gamma - \log \left(\frac{1}{2} ka \right)}$$

$$A_0 = -\frac{C}{2k}$$

$$A_1 = \frac{1}{4} Ca^2$$

en nous limitant à l'approximation définie plus haut. Nous avons donc, au voisinage du cylindre :

$$(13) \quad \begin{cases} u \approx \frac{1}{2} C \left(\gamma - \frac{1}{2} + \log \frac{1}{2} kr \right) + \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r \\ v \approx \frac{1}{4} C (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log r \end{cases}$$

4. — Calcul de la force exercée par le fluide sur le cylindre

Les tensions normales et tangentielles exercées par le fluide sur le cylindre sont :

— composante normale :

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

— composantes tangentielles :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

La résultante des forces agissant sur le cylindre est un vecteur porté par l'axe des x par raison de symétrie, dont la longueur est :

$$(14) \quad P = \int \int_S f_x ds$$

où f_x désigne la composante suivant la direction x de la tension résultante agissant sur un élément de surface ds du cylindre, le domaine d'intégration étant sa surface S .

Nous avons :

$$f_x = \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta$$

α et β étant les cosinus directeurs de la normale extérieure. D'où ici :

$$\alpha = \frac{x}{a} \quad \beta = \frac{y}{a}$$

Il vient donc :

$$(15) \quad \begin{aligned} af_x &= \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) y \\ af_x &= -px + \mu \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Par unité de longueur du cylindre, P vaut donc :

$$(16) \quad P = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} f_x a d\theta = \int_0^{2\pi} af_x d\theta$$

Intégrons successivement chaque terme :

$$a) \quad -px = -\varphi U x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\varphi U x \left[A_0 \frac{x}{r^2} + A_1 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) + \dots \right]$$

Il vient pour $r = a(x = a \cos \theta)$,

$$\int_0^{2\pi} -px d\theta = -\varphi U A_0 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \varphi \frac{U}{a} A_1 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta$$

$$+ 2p \frac{U}{a} A_1 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta$$

$$= -\varphi U A_0 \Pi$$

$$= + \Pi \varphi U \frac{C}{2k} = \Pi \mu C$$

$$b) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = r \frac{\partial u}{\partial r} = r \frac{C}{2} \frac{\partial}{\partial r} \log r = \frac{C}{2r}$$

$$\int_0^{2\pi} \mu r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta = \mu \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \Pi \mu C$$

$$c) \quad \int_0^{2\pi} \mu \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta = 0 \text{ à notre ordre d'approximation.}$$

Il vient finalement :

$$P = 2 \Pi \mu C$$

ou en remplaçant C par sa valeur :

$$(17) \quad P = \frac{4 \pi \mu U}{\frac{1}{2} - \gamma - \log \frac{ka}{2}}$$

Remarque : l'expérience montre que cette formule est applicable seulement si $Re = \frac{U \cdot 2a}{\frac{\mu}{\varphi}} = 4 ka$ est inférieur à 1 (Re est le nombre de Reynolds).

Pour un cylindre de longueur L, cette force de freinage vaut :

$$F_L = \frac{4 \pi \mu L U}{\frac{1}{2} - \gamma - \log \frac{ka}{2}} \text{ avec } \frac{ka}{2} = \frac{Ua}{4\nu}$$

On trouve, comme dans le cas de la sphère, la vitesse-limite en égalant la force due à la gravitation à cette force de freinage :

$$F_a = \pi a^2 L \varphi g$$

D'où :

$$(18) \quad V_L = \frac{a^2 \varphi g}{4 \mu} \left(\frac{1}{2} - \gamma + \log \frac{4 \nu}{V_L a} \right)$$

Il s'agit d'une fonction implicite de V_L qui peut également s'écrire de la façon employée page 329. La formule (18) ci-dessus a été utilisée pour l'application numérique (établissement du tableau 1, colonne cylindre).