LA RÉPARTITION DES ARBRES EN CATÉGORIES DE GROSSEUR : DÉCILES DE JEDLINSKI ET DISTRIBUTIONS LOG-NORMALES

P. DAGNÉLIE et J. RONDEUX

*Chaire de Statistique et Chaire de Sylviculture,
Faculté des Sciences agronomiques de l'Etat,
Gembloux (Belgique)*

RÉSUMÉ

La répartition des arbres par catégories de grosseur, en futaie équiennne, a été étudiée de façon détaillée par JEDLINSKI et ses collaborateurs, au cours d'une série de travaux malheureusement peu connus. Tenant compte de l'abondance de la documentation fournie par ces auteurs, il nous a paru intéressant de préciser l'allure des distributions observées, en procédant à divers ajustements de distributions théoriques. L'étude réalisée montre que l'ajustement de distributions log-normales s'avère particulièrement satisfaisant.

1. — INTRODUCTION

La répartition des arbres par catégories de grosseur, en futaie équiennne, a été étudiée de façon détaillée par JEDLINSKI et ses collaborateurs, au cours d'une série de travaux malheureusement peu connus (BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, 1932 ; JEDLINSKI, 1932). Tenant compte de l'abondance de la documentation fournie par ces auteurs, il nous a paru intéressant de préciser l'allure des distributions observées, en procédant à divers ajustements de distributions théoriques.

Nous présentons successivement les données utilisées (paragraphe 2), la méthode d'ajustement qui a été employée (paragraphe 3), les principaux résultats obtenus (paragraphe 4) et, en conclusion, quelques distributions-types des grosseurs des arbres en futaie équiennne (paragraphe 5).

2. — DONNÉES

Les données présentées par BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ sont relatives à 173 parcelles équiennes de pin sylvestre, comportant chacune, en moyenne, environ 670 arbres : l'ensemble s'étend donc à plus de 115.000 bois.

TABLEAU 1 — TABLE 1

*Valeurs observées des déciles de JEDLINSKI et ajustement d'une distribution log-normale : exemple**Observed values of JEDLINSKI's deciles and fitting of a lognormal distribution : an example*

N° d'ordre	Fréquences relatives cumulées	Déciles observés (cm)	u_i	y_i	w_i	$\hat{y}_i$	Déciles estimés (cm)	Différences (cm)	Différences (%)
1	0,1	14,5	— 1,282	1,1614	0,342	1,1556	14,31	0,19	1,3
2	0,2	15,7	— 0,842	1,1959	0,490	1,2037	15,98	— 0,28	— 1,8
3	0,3	17,1	— 0,524	1,2330	0,576	1,2385	17,32	— 0,22	— 1,3
4	0,4	18,4	— 0,253	1,2648	0,622	1,2681	18,54	— 0,14	— 0,8
5	0,5	20,0	0	1,3010	0,637	1,2957	19,76	0,24	1,2
6	0,6	21,3	0,253	1,3284	0,622	1,3234	21,06	0,24	1,1
7	0,7	22,9	0,524	1,3598	0,576	1,3530	22,54	0,36	1,6
8	0,8	24,8	0,842	1,3944	0,490	1,3878	24,42	0,38	1,6
9	0,9	26,1	1,282	1,4166	0,342	1,4359	27,28	— 1,18	— 4,3
—	—	—	—	—	—	Différence moyenne absolue			1,7 %

Pour ces différentes parcelles, sont essentiellement donnés les *déciles de la distribution des diamètres*, parfois appelés déciles de JEDLINSKI. Ceux-ci sont exprimés d'une part en valeurs absolues, en centimètres, et d'autre part en valeurs relatives, en pourcent du diamètre de l'arbre de surface terrière moyenne ⁽¹⁾.

Les premières colonnes du tableau 1 reprennent, à titre d'exemple, les données relatives à la première parcelle de BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, qui comprend 566 arbres : 10 % de ceux-ci ont un diamètre inférieur à 14,5 cm, 10 % ont un diamètre compris entre 14,5 et 15,7 cm, etc. En outre, la figure 1 donne une représentation graphique de ces valeurs, sous la forme d'un diagramme de fréquences cumulées à échelles logarithmique en abscisses et probit en ordonnées. La quasi-linéarité de la relation ainsi mise en évidence est un premier indice du caractère log-normal de la distribution des diamètres ⁽²⁾.

En plus de ces données fournies parcelle par parcelle, le travail de BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ comprend également quelques valeurs moyennes des déciles, obtenues chaque fois à partir de plusieurs dizaines de milliers de bois.

FIG. 1. — Valeurs observées des déciles de JEDLINSKI et ajustement d'une distribution log-normale : exemple (échelle logarithmique en abscisses et échelle probit en ordonnées)

FIG. 1. — Observed values of JEDLINSKI's deciles and fitting of a lognormal distribution : an example (logarithmic scale in abscissae and probit scale in ordinates)

3. — MÉTHODES D'AJUSTEMENT

L'ajustement de distributions log-normales a été réalisé par la *méthode des moindres carrés*, sur la base des diagrammes probits logarithmiques, en considérant comme variable indépendante les écarts réduits u_i qui correspondent, pour la distribution normale réduite, aux probabilités cumulées 0,1, 0,2, etc., et comme variable dépendante les logarithmes y_i des déciles observés (tableau 1). De plus, les couples (u_i, y_i) ont été pondérés par les coefficients w_i qui interviennent normalement dans les calculs de probits (PEARSON et HARTLEY, 1966).

(1) Les *déciles* d'une distribution de fréquences sont les neuf valeurs qui divisent cette distribution en dix classes de même effectif (DAGNELIE, 1969-1970).

(2) Une variable aléatoire est dite *logarithmico-normale* ou *log-normale* lorsque la distribution de son logarithme, népérien ou décimal, est normale (au sens de LAPLACE-GAUSS). Les distributions log-normales sont toujours dissymétriques, la dissymétrie étant d'autant plus prononcée que le coefficient de variation de la distribution est grand. Les diagrammes à échelles logarithmique en abscisses et probit en ordonnées, aussi appelés diagrammes probits logarithmiques, sont tels que les fonctions de répartition de ces distributions (fonctions cumulatives) sont représentées par des droites (*Ibid.*).

Pour l'exemple donné au tableau 1, et en utilisant les logarithmes décimaux, on obtient ainsi l'équation de régression pondérée :

$$y = 1,2957 + 0,1093 u.$$

Cette équation permet d'estimer les valeurs théoriques $\hat{y}_i$ des logarithmes des déciles, les valeurs théoriques des déciles et les écarts entre ces valeurs théoriques et les valeurs observées. Dans le cas présent, ces écarts ne dépassent jamais 4,3 % de la valeur théorique correspondante et ils sont égaux en moyenne à 1,7 % des valeurs théoriques. La figure 1 illustre également le processus d'ajustement, en montrant la position de la droite de régression et l'importance des écarts entre déciles observés et estimés.

En outre, du fait de la nullité de la moyenne des valeurs u_i , le terme indépendant 1,2957 de l'équation de régression peut être considéré comme une estimation de la moyenne des logarithmes des diamètres. De même, du fait du caractère réduit des écarts u_i , le coefficient de régression 0,1093 est une estimation de l'écart-type de ces logarithmes (DAGNELIE, 1969-1970 ; TOMASSONE, 1963).

Enfin, dans l'hypothèse d'une distribution log-normale, on peut déduire de ces paramètres relatifs à la distribution des logarithmes les paramètres de la distribution initiale des diamètres (AITCHISON et BROWN, 1957 ; DAGNELIE, 1969-1970). Les valeurs les plus faciles à obtenir sont la *moyenne géométrique*, qui se confond dans ces conditions avec la *médiane* :

$$\hat{m}_g = \text{antilog}_{10} (1,2957) = 19,76 \text{ ou } 19,8 \text{ cm},$$

et le *coefficient de variation* :

$$\hat{V} = \sqrt{\text{antilog}_{10} [(2,3026) (0,1093)^2] - 1} = 0,256 \text{ ou } 25,6 \%,$$

ou plus rapidement, mais de façon approximative (DAGNELIE, 1970) :

$$\hat{V} = (231) (0,1093) = 25,2 \%.$$

De même, on retrouve aussi la *moyenne arithmétique* des diamètres :

$$\hat{m}_a = \text{antilog}_{10} [1,2957 + (2,3026) (0,1093)^2 / 2] = 20,4 \text{ cm}$$

ou $\hat{m}_a = (19,76) \sqrt{1 + (0,256)^2} = 20,4 \text{ cm}$;

et leur *moyenne quadratique*, qui n'est autre que le diamètre de l'arbre de surface terrière moyenne :

$$\hat{m}_q = \sqrt{\text{antilog}_{10} [2(1,2957) + 2(2,3026) (0,1093)^2]} = 21,1 \text{ cm}$$

ou $\hat{m}_q = (19,76) [1 + (0,256)^2] = 21,1 \text{ cm}.$

4. — RÉSULTATS

Le processus d'ajustement décrit ci-dessus a été appliqué successivement aux valeurs absolues des déciles relatifs aux 173 parcelles de BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, aux valeurs relatives de ces déciles et aux différents cas moyens donnés par ces auteurs.

Pour les valeurs individuelles, absolues et relatives, des différentes parcelles, l'écart moyen absolu entre les déciles observés et estimés est en moyenne égal à 1,1 % des valeurs estimées ; en aucun cas, sur les 346 ajustements, cet écart ne dépasse 3,8 %. L'ajustement est donc meilleur en moyenne que celui qui a été présenté ci-dessus de façon détaillée (écart moyen absolu égal à 1,7 %). Pour les résultats moyens de BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, l'écart moyen absolu est toujours inférieur à 0,6 %.

L'ajustement de distributions log-normales s'avère donc très satisfaisant. Cette conclusion confirme le fait que la distribution des diamètres ou des circonférences, en peuplement équienne, a souvent tendance à être dissymétrique (PRODAN, 1965), l'hypothèse d'une distribution de type log-normal se justifiant plus que l'hypothèse d'une distribution strictement normale.

Un examen plus attentif des résultats des ajustements montre en réalité l'existence de différences systématiques entre les données de BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, d'une

part, et le modèle log-normal, d'autre part. Les écarts entre les valeurs observées et les valeurs estimées des déciles sont en effet plus souvent négatifs que positifs pour les premiers déciles, plus souvent positifs que négatifs pour les déciles intermédiaires et plus souvent négatifs que positifs à nouveau pour les derniers déciles. Toutefois, les erreurs systématiques qui pourraient en résulter, dans l'estimation des déciles à l'aide du modèle log-normal, sont en moyenne de l'ordre du millimètre seulement pour les valeurs absolues des diamètres et de l'ordre du demi-pour-cent pour les valeurs relatives.

L'introduction dans le modèle d'un troisième paramètre permettrait vraisemblablement d'éliminer ces erreurs, mais une telle opération ne nous a pas semblé utile, en raison de leur importance pratique relativement faible ⁽¹⁾.

5. — QUELQUES DISTRIBUTIONS-TYPES

En admettant l'hypothèse d'une répartition log-normale des grosseurs, nous pouvons donner, en conclusion, les principales caractéristiques de quelques distributions-types.

Il faut constater à cette fin que, pour les valeurs absolues des diamètres observés par BORKOWSKI et ANTOSIEWICZ, les moyennes des différentes parcelles (moyennes géométriques ou médianes) varient de 7 à 56 cm, la moyenne générale étant égale à 21,5 cm, tandis que les coefficients de variation s'étendent de 16 à 39 %, avec une moyenne générale égale à 24,5 %. De plus, l'examen de la distribution à deux dimensions des moyennes et des coefficients de variation montre l'existence d'une forte corrélation négative entre ces caractéristiques ($r = -0,73$), les coefficients de variation les plus élevés correspondant dans l'ensemble aux diamètres moyens les plus faibles et vice-versa. Cette relation n'est cependant pas strictement linéaire et elle peut être améliorée sensiblement par une transformation logarithmique.

On obtient ainsi l'équation :

$$\log_{10} V = 1,7780 - 0,3050 \log_{10} m_g,$$

qui permet de montrer qu'à un diamètre moyen géométrique de 10 cm correspond, en moyenne, un coefficient de variation de 29,7 %, à un diamètre moyen géométrique de 20 cm un coefficient de variation de 24,1 %, etc.

Le tableau 2 donne, à titre d'exemple, les principaux paramètres de cinq distributions-types définies de cette façon. Il s'agit de la moyenne géométrique des diamètres (égale aussi à leur médiane), de leur moyenne arithmétique, de leur moyenne quadratique (égale au diamètre de l'arbre de surface terrière moyenne), de leur coefficient de variation, des valeurs absolues des déciles et de leurs valeurs relatives, exprimées en pour-cent de la moyenne quadratique. De même, la figure 2 donne une représentation graphique de ces distributions, sous forme de fonction de densité de probabilité, tandis que la figure 3 montre comment évoluent les valeurs relatives des déciles en fonction

(1) La notion de distribution log-normale peut en effet être étendue au cas de trois paramètres, en supposant que le logarithme de la variable aléatoire initiale *diminuée d'une certaine constante* possède une distribution normale de moyenne et d'écart-type donnés (AITCHISON et BROWN, 1957).

FIG. 2. — Fonctions de densité de probabilité de quelques distributions log-normales

FIG. 2. — Probability density functions of some lognormal distributions

FIG. 3. — Relation entre les valeurs relatives des déciles et les différents diamètres moyens (m_g = diamètre moyen géométrique ou médiane; m_a = diamètre moyen arithmétique; m_q = diamètre moyen quadratique ou diamètre de l'arbre de surface terrière moyenne)FIG. 3. — Relation between the relative values of the deciles and the different mean diameters (m_g = geometric mean diameter or median; m_a = arithmetic mean diameter; m_q = quadratic mean diameter or diameter of the mean basal area tree)

des différents diamètres moyens. Cette dernière figure permet une détermination relativement aisée de la répartition en catégories de grosseur des arbres d'un peuplement de diamètre moyen donné.

TABLEAU 2 — TABLE 2

Principaux paramètres de quelques distributions log-normales : moyenne géométrique m_g , moyenne arithmétique m_a , moyenne quadratique m_q , coefficient de variation V , valeurs absolues et valeurs relatives des déciles, en pour-cent de la moyenne quadratique

Parameters of some lognormal distributions : geometric mean m_g , arithmetic mean m_a , quadratic mean m_q , variation coefficient V , absolute values of the deciles and relative values of the deciles (percentage of the quadratic mean)

Paramètres		Distributions log-normales				
m_g (cm)		10	20	30	40	50
m_a (cm)		10,43	20,57	30,67	40,75	50,82
m_q (cm)		10,88	21,16	31,36	41,52	51,66
V (%)		29,7	24,1	21,3	19,5	18,2
Déciles : valeurs absolues (cm)	1	7,2	15,2	23,4	31,8	40,3
	2	8,2	16,8	25,7	34,6	43,7
	3	9,0	18,2	27,5	36,8	46,2
	4	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5
	5	10,4	20,6	30,7	40,8	50,8
	6	11,2	21,8	32,4	42,8	53,2
	7	12,1	23,3	34,3	45,1	55,9
	8	13,3	25,1	36,6	47,9	59,2
	9	15,1	27,9	40,2	52,2	64,0
Déciles : valeurs relatives (%)	1	66	72	75	77	78
	2	75	80	82	83	84
	3	82	86	88	89	89
	4	89	92	93	94	94
	5	96	97	98	98	98
	6	103	103	103	103	103
	7	112	110	109	109	108
	8	122	119	117	116	115
	9	139	132	128	126	124

SUMMARY

THE DISTRIBUTION OF TREE DIAMETERS : JEDLINSKI'S DECILES
AND LOGNORMAL DISTRIBUTIONS

The distribution of tree diameters in even-aged forests has been extensively studied by JEDLINSKI *et al.*, in a series of little known papers (BORKOWSKI and ANTOSIEWICZ, 1932; JEDLINSKI, 1932). On account of the mass of information given by these authors, we found useful to state more precisely the nature of the observed distributions, by means of some distribution fittings. The fitting of lognormal distributions has been very satisfactory.

We successively present the data used (section 2), the method of fitting we have used (section 3), the main results (section 4) and several typical distributions of tree diameters in even-aged forests (section 5).

ZUSAMMENFASSUNG

DIE STAMMZAHLVERTEILUNG NACH STÄRKESTUFEN IN GLEICHALTRIGEM HOCHWALD :
JEDLINSKI'SCHE DEZILEN UND LOG-NORMALVERTEILUNGEN

Die Stammzahlverteilung nach Stärkestufen, in gleichaltrigem Hochwald, wurde sehr genau durch JEDLINSKI und seine Mitarbeiter in verschiedenen leider zu wenig bekannten Werken studiert (BORKOWSKI und ANTOSIEWICZ, 1932; JEDLINSKI, 1932). Die durch diese Autoren in grosser Anzahl beschafften Urkunden berücksichtigend, haben wir es als nützlich erachtet, den Verlauf der beobachteten Verteilungen genau anzugeben, indem wir verschiedene Anpassungen theoretischer Verteilungen durchgeführt haben. Die vorliegende Forschung beweist, dass die Anpassung Log-normalverteilungen besonders zufriedenstellend ist.

Wir legen nacheinander die verwerteten Angaben dar (Par. 2), die angewendete Anpassungsmethode (Par. 3), die wichtigsten erreichten Ergebnisse (Par. 4) und, als Schlussfolgerung, einige typische Verteilungen der Baumdurchmesser in gleichaltrigem Hochwald (Par. 5).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AITCHISON J., BROWN J. A. C., 1957. *The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics*. Univ. Press, Cambridge, 176 p.
- BORKOWSKI P., ANTOSIEWICZ A., 1932. *Proba klasyfikacji siedlisk drzewostanów sosnowych Polski według krzywych rozdziałczych absolutnych grubości* (Essai de classification des stations des peuplements de pin sylvestre de Pologne à l'aide des courbes de répartition des grosseurs prises en valeurs absolues). In : JEDLINSKI W. *et al.* *Badania właściwości struktury, rozwoju i przyrostu drzewostanów sosnowych w Polsce* (Recherches sur les particularités de la structure du développement et de l'accroissement des peuplements de pin sylvestre de Pologne). Ecole Centrale Agronomique, Varsovie, pp. 59-92.
- DAGNELIE P., 1969-1970. *Théorie et méthodes statistiques : applications agronomiques* (2 vol.). Duculot, Gembloux, 378 + 451 p.
- DAGNELIE P., 1970. A propos de la relation entre le coefficient de variation d'une variable aléatoire et l'écart-type de son logarithme. *Biom. Praxim.*, **11** (sous presse).
- JEDLINSKI W., 1932. *Badania wstępne do tablic zasobności i przyrostu drzewostanów sosnowych w Polsce* (Recherches préliminaires relatives aux tables de volume et d'accroissement des peuplements de pin sylvestre de Pologne). In : JEDLINSKI W. *et al.* *Badania właściwości struktury, rozwoju i przyrostu drzewostanów sosnowych w Polsce* (Recherches sur les particularités de la structure du développement et de l'accroissement des peuplements de pin sylvestre de Pologne). Ecole Centrale Agronomique, Varsovie, pp. 5-58.
- PEARSON E. S., HARTLEY H. O., 1966. *Biometrika tables for statisticians*. Univ. Press, Cambridge, 264 p.
- PRODAN M., 1965. *Holzmesslehre*. Sauerländer, Francfort, 644 p.
- TOMASSONE R., 1963. Méthode graphique de calculs de la moyenne et de l'écart-type d'une distribution normale ; test de normalité. *Rev. forest. franç.*, 791-797.