

Modélisation de la structure locale et simulation d'éclaircies dans un peuplement hétérogène

Jean-Claude Pierrat*

Laboratoire INRA/ENGREF de Recherches en Sciences Forestières, Unité Dynamique des Systèmes Forestiers, École Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, 14, rue Girardet, 54042 Nancy Cedex, France

(Reçu le 20 mai 1999; accepté le 8 novembre 1999)

Résumé – Nous étendons un précédent modèle [5] pour prédire les caractéristiques (distribution des diamètres et structure spatiale) d'un peuplement hétérogène après éclaircie locale et sélective à partir des caractéristiques initiales. Nous considérons un peuplement divisé en placeaux d'un nombre constant d'arbres, décrits par leur surface et par les nombres d'arbres par classe de diamètre pour chaque espèce. Localement la sélection des arbres est basée sur un nombre d'arbres à prélever en suivant un certain classement. Tous les deux dépendent de l'état du placeau. La loi de l'état d'un placeau a été modélisée par un mélange de lois multinomiales ayant des coefficients dépendants de la surface. Pour un peuplement particulier, nous avons estimé ces paramètres (par maximum de vraisemblance à l'aide de l'algorithme EM et d'un échantillon de placeaux) puis les effectifs des composantes du mélange. Nous en déduisons les lois des statistiques d'ordre, puis de celles ci les effectifs moyens prélevés dans chaque classe et la loi du placeau après coupe. Le modèle est validé sur un peuplement mélangé de hêtres et de chênes. Nous choisissons une stratégie de prélèvement, et montrons l'influence de différents facteurs sur les produits prélevés et sur les associations entre arbres de même placeau. En discussion, des applications et des extensions du modèle de prélèvement sont proposées pour aider à définir et comparer les consignes d'éclaircie.

sylviculture locale et sélective / peuplement hétérogène / mélange de distribution statistique

Abstract – Modelling local structure and simulation of thinning in a mixed stand. We extend a previous model [5] to predict the characteristics (diameter distribution and spatial structure) of a mixed stand after a local and selective thinning, knowing initial characteristics. The stand is divided into plots with constant number of trees. A plot is described by a vector including the area and the number of trees in each diameter class of each species. In a plot, the selection of the trees that are to be thinned is based on their rank according to some criterion. These criteria and the number of trees to be thinned depend on the area and on the composition of the plot. For a randomly sampled plot, the probability law of the state vector is modelled by a mixture of multinomial distributions (with coefficients depending on the area), which reflects the spatial structure at the plot scale. For a particular stand, the parameters of the mixture are estimated by maximum likelihood with the EM algorithm, using a sample of plots. Then, the particular components are estimated and the laws of the order statistics are computed. From there, we deduce the expected number of thinned trees by class and the new probability law of the plot. The model is applied and validated on a mixed oak-beech stand. We choose a thinning strategy and show the influence of factors on the harvest and on the structure of the neighbour trees. In conclusion, applications and extension of the model are discussed in order to define and compare local thinning.

selective thinning / mixed stand / mixture of statistical distribution

* Correspondance et tirés-à-part
Tel. (33) 03 83 39 68 00; Fax. (33) 03 83 30 22 54; e-mail : pierrat@nancy-engref.inra.fr

1. INTRODUCTION

Adapter le type d'éclaircie à l'organisation des arbres dans l'espace est une préoccupation majeure du gestionnaire, notamment dans les peuplements hétérogènes où la structure est un facteur important de la dynamique [2, 3, 6, 7]. Généralement, l'aménagiste a élaboré une stratégie générale de culture des essences en termes d'indicateurs globaux (dosage des essences, histogramme des diamètres), mais le sylviculteur qui martèle l'éclaircie va nécessairement devoir tenir compte de la diversité des configurations locales. En effet, c'est à l'échelle du petit groupe d'arbres, et à celle-ci seulement, que s'apprécie l'opportunité de garder tel ou tel arbre, ou telle ou telle organisation locale des arbres dans l'espace. C'est donc à cette échelle opérationnelle que nous avons défini: (1) un modèle de la structure locale du peuplement paramétré de façon à pouvoir rendre compte des relations de voisinage entre arbres; (2) un modèle de prélèvement, paramétré de façon à pouvoir simuler différentes règles de décision auxquelles s'astreint le sylviculteur.

L'objectif général de l'article est de montrer en quoi la connaissance de la structuration du peuplement initial permet la prédiction de l'éclaircie. Lorsque les paramètres des deux modèles sont fixés, nous évaluerons les conséquences de la stratégie de prélèvement sur la structure locale et sur les indicateurs globaux du peuplement. Comme les deux modèles sont indépendants, nous pourrions faire varier les paramètres de l'un ou de l'autre pour étudier leur influence.

Dans la section suivante, après avoir donné un exemple, les deux modèles seront présentés de façon générale. La méthode statistique utilisée pour la construction du modèle de structure viendra ensuite. Elle généralise celle développée dans [5] en ce qu'elle introduit la notion de densité locale et permet de simuler des règles de décision variables selon l'état local. La troisième section présente la démarche de validation du modèle de structure à partir de simulations sur un peuplement cartographié.

Dans la quatrième section, nous exposerons les résultats de la validation puis des exemples de simulations. En conclusion les limitations du modèle et les perspectives seront discutées.

2. MATÉRIEL EXPÉRIMENTAL ET PROBLÈME SYLVICOLE

2.1. Peuplement et prescription sylvicole envisagés

Le peuplement est constitué par trois placettes témoins du dispositif d'expérimentation de Réno-

Valdieu [4]. Ce peuplement est âgé d'environ quarante ans, d'une surface totale de 0,6 ha et l'on dispose des diamètres, espèces et coordonnées de tous les arbres. Après exclusion de 300 arbres trop petits pour avoir un intérêt sylvicole, ce peuplement contient 768 arbres avec 36 % de hêtres et 64 % de chênes en mélange assez intime, du moins à première vue. Quatre classes de circonférence ont été définies pour chaque espèce: 140–100 très gros (tg), 100–70 gros (g), 70–50 moyens (m), 50–30 petits (p). Par la suite, tgc est l'abréviation de très gros chênes, ... ph est celle de petit hêtre.

L'objectif de l'éclaircie est d'enlever environ 50 % des arbres en apportant de l'espace aux gros arbres, d'abord aux chênes puis aux hêtres. Notre modélisation de l'éclaircie consiste à diviser le peuplement en «placeaux» contenant un nombre d'arbres constant n ($n = 6$ dans notre exemple) puis à considérer que chaque placeau est éclairci selon une prescription. Cette prescription est définie par un nombre d'arbres à prélever et des priorités de prélèvement dépendantes des caractéristiques du placeau (composition et surface).

Nous envisageons d'une part de corriger les variations locales de densité par une intensité d'éclaircie plus forte sur les placeaux de petite surface (les surfaces sont discrétisées en trois classes: S1, surface < 20 m²; S2, 20 m² < surface < 35 m²; S3, 35 m² < surface) et d'autre part de modifier le degré de concurrence des espèces par des priorités de prélèvement différentes selon le type de composition du placeau. On distinguera trois types de placeau: type A1, où le placeau contient au moins 1 très gros chêne; type A2, où le placeau ne contient aucun très gros chêne et au moins 1 très gros hêtre; type A3, où le placeau ne contient ni très gros chênes ni très gros hêtres.

Plus précisément, selon le type du placeau, les modalités d'éclaircie seront:

- Type A1. On éclaircit d'abord les hêtres par le haut puis les chênes par le bas, soit plus précisément avec les priorités tgh, gh, mh, ph, pc, mc, gc, tgc. Selon la surface du placeau (S1, S2, S3) 4, 3, 1 arbres seront prélevés.

(Par exemple, si la surface est classée S1 on cherchera à prélever quatre tgh, à défaut on passera aux gh, puis aux mh ...)

- Type A2. On éclaircit par le haut en préservant les tgh, soit avec les priorités gh, gc, mh, mc, ph, pc, tgh. Selon la surface (S1, S2, S3) 3, 1, 0 arbres seront prélevés.

- Type A3. On éclaircit par le bas, soit avec les priorités ph, pc, mh, mc, gh, gc. Selon la surface (S1, S2, S3) 3, 2, 1 arbres seront prélevés.

2.2. Présentation générale des modèles

L'unité statistique considérée est celle du «placeau». L'état d'un placeau sera décrit par un vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_K, Su)$ où les Y_k sont les nombres d'arbres dans des classes de diamètre pour chacune des espèces, K est le nombre total de classes \times espèces, Su est la surface.

Un modèle statistique de la structure intra-placeau sera bâti en suivant le même principe que dans [5] : Si la structure spatiale était purement aléatoire, tout se passerait comme si les placeaux étaient constitués par une succession de tirages sans remise de n arbres dans une population constituée par les M arbres du peuplement, indépendamment de la surface. Pour modéliser les dépendances des arbres d'un même placeau, nous avons supposé que la composition des placeaux provient de différentes populations (appelées composantes plus loin) avec certaines probabilités qui dépendent de la surface du placeau. Dans la première partie méthode, nous exposerons ce modèle et les caractéristiques de la procédure d'estimation des paramètres pour un peuplement particulier.

Le modèle de prélèvement est basé sur une partition des états du placeau. À chaque élément de cette partition (dans l'exemple, type de placeau \times surface) sont associés des priorités de prélèvement et un nombre d'arbres à prélever. L'ensemble constitue les paramètres du modèle de prélèvement.

Lorsque les priorités sont les mêmes pour tous les placeaux, la composition du placeau peut se décrire par la liste des arbres classés selon ces priorités, c'est-à-dire par le vecteur $(D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(n)})$ des statistiques d'ordre à valeur dans les numéros de classe allant de 1 à K . Si r est le nombre d'arbres à prélever, les arbres éclaircis seront $(D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(r)})$ et la distribution des r premières statistiques d'ordre donnera la distribution des produits coupés. Celle des $(n - r)$ statistiques restantes donnera la distribution des arbres restants. Un calcul probabiliste permet de passer de la description Y à la description par les D pour obtenir les résultats recherchés.

Dans notre exemple, les priorités et r ne sont constants que par élément de la partition (i.e. pour un type de placeau et une surface donnés). Les calculs des statistiques d'ordre, des prélèvements, de l'état final s'effectueront sur chaque élément de la partition, (en terme probabiliste, conditionnellement au type et à la surface du placeau) puis les résultats d'ensemble seront obtenus par la formule de l'espérance conditionnelle (voir 3.2.1). Pour évaluer l'effet de l'éclaircie sur les voisinages, nous examinerons les liaisons entre deux arbres pris aléatoirement à l'intérieur d'un placeau avant et après coupe.

3. MÉTHODES

3.1. Modèle de structure intra-placeau

3.1.1. Présentation du modèle statistique.

Il s'agit de construire un modèle de la loi conjointe de la composition du placeau et de la surface. Le modèle est bâti avec les hypothèses suivantes :

- H1. un placeau est issu d'une parmi J composantes.

$$\Pr(y_1, \dots, y_k, \dots, y_K, s) = \sum_{j=1}^J \Pr(y_1, \dots, y_k, \dots, y_K, s, j).$$

En application des formules de probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} \Pr(y_1, \dots, y_k, \dots, y_K, s) &= \sum_{j=1}^J \Pr((y_1, \dots, y_k, \dots, y_K) / (s, j)) \Pr(s, j) \\ &= \sum_{j=1}^J \Pr((y_1, \dots, y_k, \dots, y_K) / (s, j)) \Pr(j/s) \Pr(s). \end{aligned}$$

- H2. Une fois fixée la composante j d'un placeau, la loi de $(Y_1, \dots, Y_K / (s, j))$ ne dépend plus de s .

$$\Pr((y_1, \dots, y_k, \dots, y_K) / (s, j)) = \Pr((y_1, \dots, y_k, \dots, y_K) / (j))$$

- H3. Une fois fixée la composante j d'un placeau, les arbres sont indépendants ; la loi de (Y_1, \dots, Y_K) est alors multinômiale. Nous noterons $(C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jk})$ les paramètres de la composante j .

Finalement nous obtenons :

$$\Pr(y_1, \dots, y_k, \dots, y_K, S) = \sum_{j=1}^J \frac{n!}{y_1! \dots y_K!} c_{j1}^{y_1} \dots c_{jK}^{y_K} \Pr(j/s) \Pr(s)$$

Les paramètres du modèle seront donc : J le nombre de composantes, $((c_{j1}, \dots, c_{jk})_{j=1, \dots, J})$ les proportions de chaque classe dans chaque composante, $(\Pr(j/s), j=1, \dots, J)$ les proportions de chaque composante dans chaque classe de surface, $(\Pr(s), s=1, \dots, S)$ les proportions de chaque classe de surface.

3.1.2. Estimation des paramètres

Pour estimer ces paramètres, nous utiliserons I observations de placeaux de taille n obtenues par sondage du peuplement (nous ne disposons pas seulement des mesures individuelles des arbres). Les $\Pr(s)$ sont estimés sur l'échantillon puis, à J fixé, les autres paramètres seront estimés en maximisant la vraisemblance des observations à l'aide de l'algorithme EM [1]. (Cet

algorithme est repris dans [5] et par rapport à cet article, on remplacera ff par $\Pr(j/s)$.

Un point délicat est le choix du nombre de populations J . En l'absence de test statistique, nous avons adopté une procédure ascendante faisant croître le nombre de composantes de façon à observer la composition des mélanges de 2 à J composantes. Dès qu'une composante d'effectif inférieur à 50 arbres apparaît, la procédure est arrêtée (pour s'affranchir de la taille du plateau un critère basé sur une proportion pourrait également être envisagé).

Par la suite, nous considérerons un peuplement particulier d'histogramme (m_1, \dots, m_k) , et de loi de surface $\Pr(s)$. Nous aurons besoin des effectifs par classes et par composantes estimés par

$$E_{jk} = m_k \sum_s P(j, s/k) = m_k \frac{c_k^j \sum_s \Pr(j/s) \Pr(s)}{\sum_{u=1}^J c_k^u \sum_s \Pr(j/s) \Pr(s)}.$$

3.2. Méthodes statistiques pour les prélèvements

3.2.1. Calcul des prélèvements moyens

Nous cherchons l'effectif moyen éclairci dans chaque classe à partir des paramètres $(J; \Pr(s), s=1, S; \Pr(j/s), j=1, J, s=1, S; E_{jk}, j=1, J, k=1, K)$ et des consignes de coupe.

Soit M l'effectif du peuplement, soit $\frac{M}{n}$ le nombre de placeaux et soit $E(Ck)$ l'effectif moyen de la classe k coupé dans un placeau. L'effectif cherché est $\frac{M}{n} E(Ck)$.

Le calcul de $E(Ck)$ s'effectuera par l'intermédiaire du conditionnement par rapport aux types, aux surfaces et à l'appartenance aux diverses composantes des placeaux.

Soit (Aq, s, j) l'évènement « le placeau appartient au type Aq , a une surface s et appartient à la composante j ». On a de par la formule de l'espérance conditionnelle :

$$E(Ck) = \sum_{q=1}^Q \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^J \Pr(Aq, s, j) E(Ck/Aq, s, j).$$

Examinons les deux termes à l'intérieur du signe de sommation.

a) $\Pr(Aq, s, j)$.

La formule des probabilités conditionnelles nous donne :

$$\Pr(Aq, s, j) = \Pr(Aq/s, j) \Pr(j/s) \Pr(s)$$

et avec l'hypothèse H2

$$\Pr(Aq, s, j) = \Pr(Aq/j) \Pr(j/s) \Pr(s)$$

On dispose des estimations de $\Pr(j/s)$ et de $\Pr(s)$. Pour calculer $\Pr(Aq/j)$ on traduit l'évènement Aq en terme de statistiques d'ordre. Ainsi, dans l'exemple traité on a :

– Pour A1, l'ordre des classes est tgh, gh, mh, ph, pc, mc, gc, tgc.

A1 équivaut à « $D^{(n)}$ est dans la classe 8 ».

– Pour A2, l'ordre des classes est gh, gc, mh, mc, ph, pc, tgh, tgc.

A2 équivaut à « $D^{(n)}$ est dans la classe 7 ».

– Pour A3, l'ordre des classes est ph, pc, mh, mc, gh, gc tgh tgc.

A3 équivaut à « $D^{(n)} < 7$ ».

On termine le calcul numérique des probabilités des statistiques d'ordre en appliquant la formule (1) en annexe 1, à la composante j (les classes étant réordonnées selon l'ordre adapté à Aq , leurs effectifs E_{jk} étant donnés au 3.1.2).

b) $E(Ck/Aq$ et s et $j)$.

Pour un placeau de surface s et de type Aq , le nombre d'arbres à prélever sera noté $r(s, q)$. Les prélèvements sont constitués par $(D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(r(s, q))})$, l'ordre étant induit par Aq dans l'exemple traité (notons que sans aucune difficulté cet ordre aurait pu dépendre aussi de s).

$$\begin{aligned} E(Ck/Aq \text{ et } s \text{ et } j) &= \sum_{i=1}^{r(s, q)} \Pr(D^{(i)} \in k/Aq, s, j) \\ &= \sum_{i=1}^{r(s, q)} \Pr(D^{(i)} \in k/Aq, j) \quad (\text{hypothèse H2}) \\ &= \sum_{i=1}^{r(s, q)} \frac{\Pr(D^{(i)} \in k, Aq/j)}{\Pr(Aq/j)}. \end{aligned}$$

L'évènement Aq étant exprimé en terme de statistiques d'ordre, le calcul du numérateur s'effectue à l'aide des lois conjointes des statistiques d'ordre dans la composante j . La formule 2 dans l'annexe présente leur calcul numérique.

3.2.2. Structure du peuplement final

La loi conjointe des statistiques d'ordre restantes permet de quantifier les relations spatiales qui subsistent ou se créent lors de la coupe. Nous nous sommes intéressés aux associations entre deux arbres pris aléatoirement dans le même placeau avant et après coupe (le placeau étant lui-même pris aléatoirement parmi les placeaux). La loi conjointe de deux tels arbres a été calculée à partir de la loi des couples des statistiques d'ordre (annexe,

paragraphe 5), chacun intervenant avec la même probabilité.

Nous avons déduit les probabilités conditionnelles $p_{kk'}$, probabilité que le second arbre soit dans la classe k' sachant que le premier est dans la classe k $\left(\sum_{k'=1}^K p_{kk'} = 1\right)$.

Le rapport de deux termes de la même colonne (k') ou risque relatif permet de comparer les probabilités de k' sachant k et k' sachant k'' . Nous indiquerons en italique les min et max de chaque colonne (risque relatif le plus grand). En l'absence de structure, les termes d'une colonne du tableau $p_{kk'}$ sont constants, exception faite des termes diagonaux légèrement inférieurs du fait du tirage sans remise.

3.3 Méthode de validation

Un programme informatique [5] permet d'obtenir différentes coupes du peuplement en placeaux de taille n et de forme compacte. Nous avons effectué dix coupes (cinq à partir de bandes horizontales et cinq à partir de bandes verticales).

Sur chaque découpage, nous avons observé les effectifs des classes par surface de placeau, les effectifs des classes par type Aq puis chaque terme de la matrice $P_{kk'}$ (par comptage des couples kk' dans chaque placeau). La série des dix valeurs de chaque quantité sera appelée série observée. Nous la résumerons par sa moyenne et son écart type. Les mêmes quantités ont été obtenues sur le peuplement éclairci, les placeaux observés après éclaircie étant obtenus par application de la politique de prélèvement sur les placeaux initiaux. Ces séries seront appelées séries observées après éclaircie.

Pour chaque découpage, nous avons ajusté le modèle puis, à partir des paramètres, nous avons estimé avant et après éclaircie les effectifs des classes par surface de placeau, les effectifs des classes par type Aq puis la matrice $P_{kk'}$. Les séries obtenues seront appelées séries estimées et séries estimées après éclaircie. Nous résumerons chaque série par sa moyenne et son écart type.

Nous verrons que les écarts types des séries observées et estimées sont du même ordre de grandeur. Nous jugerons alors des écarts (moyenne estimée – moyenne observée) par rapport à l'écart-type des observés. S'ils sont peu importants, nous concluons à la validité du modèle.

Tableau I. Paramètres du modèle de structure à 5 composantes ajustés sur la première découpe.

Tableau Ia. fréquences des classes à l'intérieur des composantes.

	Composante 1	Composante 2	Composante 3	Composante 4	Composante 5
ph	0,10	0,31	0,17	0,16	0,27
mh	0,07	0,18	0,03	0,18	0,04
gh	0,05	0,18	0,20	0,00	0,00
tgh	0,02	0,18	0,09	0,05	0,00
pc	0,26	0,00	0,00	0,11	0,35
mc	0,34	0,07	0,18	0,09	0,21
gc	0,15	0,08	0,27	0,30	0,13
tgc	0,01	0,00	0,06	0,11	0,00

Tableau Ib. fréquences des composantes conditionnellement à la surface.

	Composante 1	Composante 2	Composante 3	Composante 4	Composante 5
s=1	0,402	0,110	0	0	0,488
s=2	0,562	0,122	0,101	0,074	0,14
s=3	0,145	0	0,511	0,29	0,054

Tableau Ic. fréquences des surfaces.

	Fréquences
s=1	0,33
s=2	0,43
s=3	0,24

4. RÉSULTATS

4.1. Estimation des paramètres du peuplement initial

Avec un découpage du peuplement en 128 placeaux de 6 arbres, nous avons estimé les paramètres des modèles à 1, 2, 3, 4, 5, 6 composantes et avons retenu le modèle à 5 composantes, compte-tenu qu'une des composantes du modèle suivant est de faible effectif.

Les placeaux issus des composantes 1 ou 5 ont un profil contenant une majorité de pc-mc et peu de gros arbres (*tableau Ia*). Le profil des hêtres différencie les composantes 1 et 5. Ces placeaux sont fréquents dans les petites et moyennes surfaces (*tableau Ib*).

Symétriquement, les composantes 3 et 4 contiennent les gros et très gros arbres. Les ph sont présents. Les pc sont absents de la composante 3, présents dans la compo-

sante 4 qui contient peu de gh + tgh. Ces placeaux sont fréquents dans les grandes surfaces.

Ceux issus de la composante 2 sont constitués en majorité de hêtres et sont situés dans les petites et moyennes surfaces. Ils correspondent à des taches de hêtres effectivement repérables sur les plans.

4.2. Validation à partir du peuplement initial

4.2.1. Effectifs des classes par surface

Le *tableau II* présente les effectifs moyens pour dix découpes ainsi que les écarts types pour les séries observées et estimées. Globalement les écarts types sont semblables pour les deux séries. Les différences entre moyennes (*tableau IIb*) sont faibles par rapport à l'écart type des observées.

Tableau II. Effectifs du peuplement initial par classe et par surface. Résultats sur dix découpes.

Tableau IIa. moyenne des effectifs observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
s=1	53,6	20,6	9,7	6,1	69,7	56,2	35,0	2,2
s=2	56,9	25,9	24,1	15,6	68,5	89,0	57,3	9,0
s=3	23,5	13,5	19,2	12,3	15,8	32,8	42,7	10,7

Tableau IIb. différence des effectifs moyens estimés – observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
s=1	1,0	1,3	-0,3	0,0	-0,8	-0,4	-0,8	0,5
s=2	1,4	-0,3	-0,8	-0,3	0,2	1,3	-0,5	-0,2
s=3	-2,4	-1,0	1,1	0,3	0,6	-0,9	1,3	1,6

Tableau IIc. écart type des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
s=1	6,6	1,8	3,8	1,7	2,9	8,2	4,6	1,6
s=2	6,9	2,5	4,0	1,6	5,8	7,8	4,1	2,3
s=3	3,9	2,9	2,2	2,8	4,2	5,4	4,1	3,7

Tableau II d. écart type des résultats estimés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
s=1	7,9	3,1	3,7	1,9	4,2	6,9	5,3	0,9
s=2	7,5	3,3	3,9	2,5	6,1	7,1	5,3	2,1
s=3	4,2	2,8	2,2	2,1	3,6	3,9	5,6	2,1

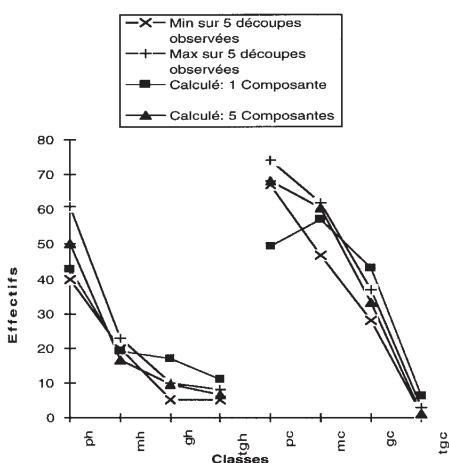


Figure 1a. surface de 0 à 20 m².

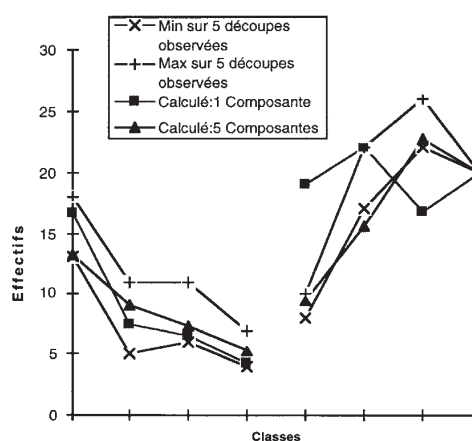


Figure 2a. Type A1.

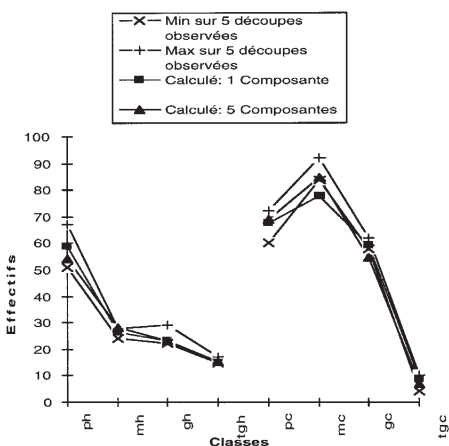


Figure 1b. surface comprise entre 20 et 35 m².

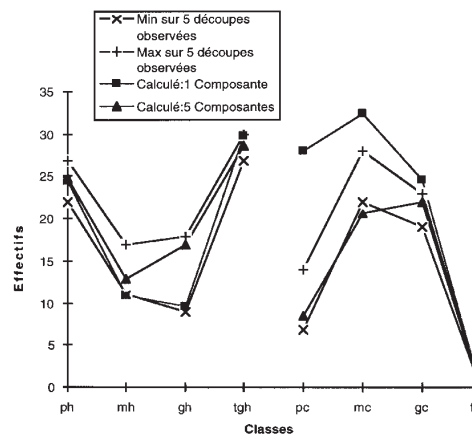


Figure 2b. Type A2.

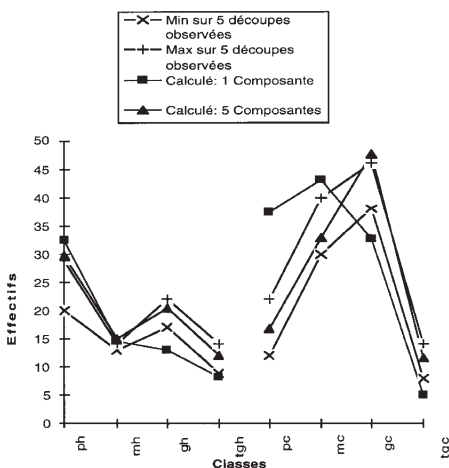


Figure 1c. surface supérieure à 35 m².

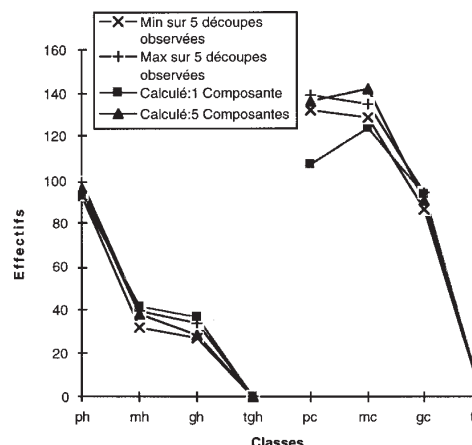


Figure 2c. Type A3.

Figure 1. Effectifs initiaux par classe pour les différentes surfaces.

Figure 2. Effectifs initiaux par classe pour les différents types de plateaux.

Tableau III. Effectifs du peuplement initial par classe et par type de placeaux. Résultats sur dix découpes.**Tableau IIIa.** moyenne des effectifs observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
Type A1	13,9	8,1	8,3	5,5	9,4	20,7	23,3	20,0
Type A2	25,5	15,0	13,7	28,5	11,1	25,5	21,1	0,0
Type A3	94,6	36,9	31,0	0,0	133,5	131,8	90,6	0,0

Tableau IIIb. différence des effectifs moyens estimés – observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
Type A1	0,5	0,4	1,1	-1,8	0,6	2,6	1,3	0,0
Type A2	2,1	2,0	-0,2	0,8	0,2	2,7	-2,4	0,0
Type A3	-2,6	-2,4	-0,9	0,0	-0,7	-4,4	1,1	0,0

Tableau IIIc. écart type des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
Type A1	1,7	2,0	2,2	1,3	1,2	2,1	2,5	0,0
Type A2	2,5	2,5	3,1	1,3	2,8	2,5	2,0	0,0
Type A3	2,7	2,7	3,0	0,0	3,2	2,3	3,9	0,0

Tableau III d. écart type des résultats estimés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
Type A1	1,2	1,1	1,8	2,9	2,4	4,6	2,2	0,0
Type A2	2,1	1,0	2,8	1,0	2,3	2,3	2,3	0,0
Type A3	2,5	1,2	2,5	0,0	2,6	3,4	3,1	0,0

Les figures (1a, 1b, 1c) représentent graphiquement la première découpe. Les min et max (pris sur les cinq premières découpes) des effectifs par classe observés ont été placés. On constate que la précision du modèle est acceptable, du même ordre que la variabilité due à la découpe.

Pour préciser l'effet de la structure, nous avons également placé (figure 1) les effectifs calculés avec le modèle à une composante, ce qui revient à répartir les effectifs initiaux proportionnellement à $Pr(s)$. Ce modèle présente des erreurs surtout dans les petites et grandes surfaces, ce qui s'explique d'une part par l'association entre les gros arbres et les grandes surfaces et d'autre part par l'antagonisme entre ces gros arbres et les petits chênes.

L'introduction des composantes améliore donc nettement la prévision. Nous admettons donc que par surface les effectifs de la série estimée se répartissent correctement dans les classes.

4.2.2. Effectifs des classes par type de placeau

Les commentaires précédents peuvent être faits pour les effectifs de chacun des types de placeau A1, A2, A3 (tableau III, figure 2).

4.2.3 Loi de deux arbres d'un placeau

Le tableau IV présente les probabilités conditionnelles $P_{kk'}$.

Les écarts types des séries observées (tableau IVc) sont semblables à ceux des séries estimées (tableau IVd) (la somme des termes du tableau IVc vaut 0,78, celle du tableau IVd vaut 0,68).

Globalement, les différences entre estimées et observées (tableau IVb) ne sont pas très importantes. La moyenne pour le tableau IVb des écarts relatifs $\frac{Abs|estimés - observés|}{observés}$ est de 8,0 % (écart type 2,8 %),

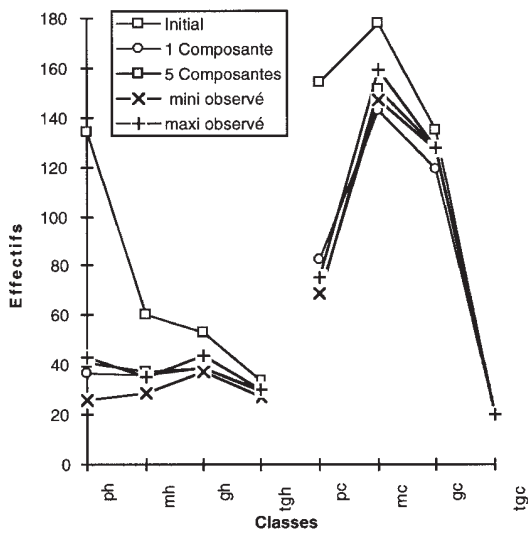


Figure 3. Effectifs par classe dans le peuplement (initial, observés après éclaircie et calculés après éclaircie selon les modèles à 1 et 5 composantes).

l'erreur moyenne relative de la découpe $\frac{\text{écart type observé}}{\text{observé}}$

est de 11,8 % (écart type 2,2 %).

On remarque ici que les faibles liaisons intra-classe sont sur-estimées : dans le modèle, la liaison intra-classe à une borne inférieure correspondant à une situation d'équirépartition des effectifs de la classe dans toutes les composantes.

Néanmoins, l'erreur due à la modélisation est admissible par rapport à la variabilité de la découpe.

4.3. Validation à partir du peuplement final

4.3.1. La figure 3 donne une vue générale des conséquences de la coupe sur l'histogramme du peuplement final. La première découpe a été représentée. Les min et max (pris sur cinq découpes) ont été placés. On note que :

- l'objectif général de favoriser les gros arbres a été atteint;
- les ph sont encore présents mais avec un effectif réduit;

- la précision de la prévision par le modèle est satisfaisante;
- la prévision par le modèle à une composante semble acceptable.

4.3.2. Prévisions de prélèvement par surface

Le tableau V présente les effectifs moyens par surface ainsi que les écarts types pour les séries observées et estimées. Globalement les écarts types sont semblables pour les deux séries. Les différences entre moyennes sont faibles par rapport à l'écart type des observées.

La figure 4 donne une vue d'ensemble et montre également les écarts pour le modèle à une composante. Des 'compensations' expliquent la relativement bonne prévision au niveau du peuplement, mais des essais (non présentés) de différentes stratégies montrent qu'elles ne se produisent pas toujours.

4.3.3 Prévisions de prélèvement par type

Les commentaires précédents peuvent être faits pour les effectifs de chacun des types de placeau A1, A2, A3 (tableau VI, figure 5).

4.3.4 Loi de deux arbres d'un placeau

Le tableau VII présente les probabilités conditionnelles P_{kk} . Globalement, les écarts types des séries observées et estimées (tableaux VIIc et VIId) sont semblables (la somme des termes du tableau VIIc vaut 1,58, celle du tableau VIId vaut 1,01).

L'erreur due à la modélisation (tableau VIIb) est admissible par rapport à la variabilité de la découpe :

l'écart relatif moyen du tableau VIIb $\frac{|\text{estimés} - \text{observés}|}{\text{observés}}$

est de 18,7 % (écart type 11 %), l'écart relatif moyen du tableau VIIa est de 32,0 % (écart type 12 %).

4.4. Conclusion de la validation

Le modèle représente la structure du peuplement avec une approximation raisonnable. Il permet de prévoir relativement bien l'histogramme des diamètres des peuplements initial et final. La prévision des liaisons des arbres pris deux à deux est globalement satisfaisante pour les peuplements initial et final. Néanmoins, initialement le modèle surestime les faibles liaisons intra classe.

Tableau IV. Probabilités conditionnelles du peuplement initial. Résultats sur dix découpes.**Tableau IVa.** moyenne des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,178	0,085	0,078	0,051	0,196	0,200	0,189	0,022
mh	0,191	0,078	0,088	0,074	0,154	0,198	0,185	0,032
gh	0,197	0,100	0,139	0,077	0,083	0,217	0,151	0,036
tgh	0,202	0,130	0,119	0,066	0,077	0,198	0,172	0,036
pc	0,171	0,060	0,029	0,017	0,293	0,278	0,139	0,013
mc	0,150	0,067	0,065	0,038	0,240	0,236	0,180	0,024
gc	0,187	0,082	0,059	0,043	0,159	0,237	0,195	0,037
tgc	0,146	0,097	0,095	0,061	0,100	0,214	0,251	0,036

Tableau IVb. différence des résultats moyens estimés - observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,020	0,001	-0,004	-0,003	-0,007	0,012	-0,020	0,000
mh	0,002	0,017	-0,002	-0,013	0,000	0,005	-0,006	-0,004
gh	-0,010	-0,002	0,012	-0,003	0,013	-0,021	0,017	-0,006
tgh	-0,011	-0,024	-0,005	0,014	0,003	-0,013	0,029	0,006
pc	-0,006	0,000	0,004	0,001	0,006	-0,011	0,006	-0,000
mc	0,009	0,002	-0,006	-0,003	-0,010	0,016	-0,008	-0,000
gc	-0,020	-0,003	0,007	0,007	0,007	-0,011	0,014	-0,000
tgc	0,003	-0,011	-0,015	0,010	-0,004	-0,002	-0,002	0,020

Tableau IVc. écart type des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,009	0,007	0,008	0,007	0,009	0,009	0,012	0,003
mh	0,016	0,011	0,014	0,009	0,010	0,013	0,015	0,008
gh	0,020	0,016	0,034	0,016	0,005	0,017	0,018	0,010
tgh	0,026	0,015	0,024	0,017	0,016	0,021	0,013	0,009
pc	0,008	0,004	0,002	0,003	0,019	0,009	0,009	0,002
mc	0,007	0,004	0,005	0,004	0,008	0,010	0,010	0,003
gc	0,011	0,007	0,007	0,003	0,011	0,013	0,012	0,005
tgc	0,021	0,023	0,026	0,014	0,015	0,023	0,031	0,008

Tableau IVd. écart type des résultats estimés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,011	0,004	0,007	0,004	0,009	0,011	0,007	0,002
mh	0,010	0,008	0,012	0,005	0,013	0,012	0,008	0,004
gh	0,018	0,013	0,037	0,014	0,012	0,016	0,014	0,008
tgh	0,016	0,008	0,021	0,010	0,016	0,018	0,021	0,006
pc	0,008	0,005	0,004	0,003	0,017	0,010	0,010	0,003
mc	0,009	0,004	0,005	0,003	0,008	0,010	0,007	0,002
gc	0,007	0,004	0,006	0,005	0,011	0,009	0,012	0,004
tgc	0,014	0,013	0,020	0,010	0,026	0,021	0,026	0,009

Tableau V. Effectifs du peuplement après éclaircie par classe et par surface. Résultats sur dix découpes.**Tableau Va.** moyenne des effectifs observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
s=1	5,7	8,1	6,8	6,1	20,3	43,7	32,4	1,7
s=2	15,6	14,6	15,8	13,2	33,8	74,7	51,1	8,3
s=3	12,2	10,5	16,1	9,3	12,7	29,5	41,6	10,0

Tableau Vb. différence des effectifs moyens estimés - observés.

s=1	0,4	- 0,9	- 0,1	0,5	- 0,3	0,5	1,4	0,1
s=2	- 0,1	- 2,2	- 1,2	0,0	0,3	- 1,1	- 0,9	- 0,9
s=3	- 3,4	- 1,3	0,0	0,0	- 0,2	- 3,0	0,3	0,9

Tableau Vc. écart type des résultats observés.

s=1	1,6	1,7	2,8	1,7	2,0	3,8	4,4	0,9
s=2	5,0	3,6	4,0	2,0	7,1	9,2	4,6	1,9
s=3	3,2	4,5	4,7	3,0	4,4	5,3	4,8	2,1

Tableau Vd. écart type des résultats estimés.

s=1	1,0	2,2	2,6	1,8	2,2	3,9	5,7	0,8
s=2	2,9	2,6	3,0	2,0	2,0	6,2	4,4	2,1
s=3	3,3	2,4	2,6	1,7	3,0	3,9	5,6	2,1

Tableau VI. Effectifs du peuplement après éclaircie par classe et par type de placeaux. Résultats sur dix découpes.**Tableau VIa.** moyenne des effectifs observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
Type A1	5,8	3,3	1,8	0,2	3,4	12,7	22,5	20,0
Type A2	22,4	9,5	7,7	28,5	10,7	21,5	13,9	0,0
Type A3	7,1	21,9	30,7	0,0	55,5	117,2	90,5	0,0

Tableau VIb. différence des effectifs moyens estimés - observés.

Type A1	0,1	1,1	0,1	- 0,3	0,4	0,3	3,3	0,1
Type A2	1,2	0,5	0,4	0,9	0,2	2,4	- 2,1	0,0
Type A3	- 2,7	- 4,4	- 0,3	0,0	2,1	- 2,7	1,4	0,0

Tableau VIc. écart type des résultats observés.

Type A1	2,9	2,2	1,2	0,4	1,2	2,5	1,7	0,0
Type A2	3,8	2,1	1,9	1,3	2,8	3,0	2,3	0,0
Type A3	1,0	2,0	3,2	0,0	5,0	4,5	3,7	0,0

Tableau VI d. écart type des résultats estimés.

Type A1	1,5	0,7	0,8	0,2	1,2	2,0	1,2	0,1
Type A2	1,8	1,1	1,7	1,0	2,1	2,2	2,2	0,0
Type A3	1,6	1,1	2,5	0,0	3,4	2,9	3,2	0,0

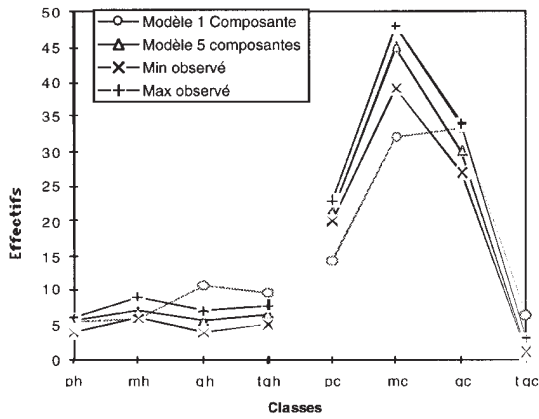


Figure 4a. surface de 0 à 20 m².

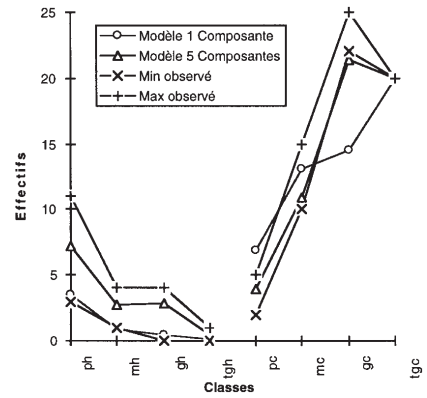


Figure 5a. Type A1.

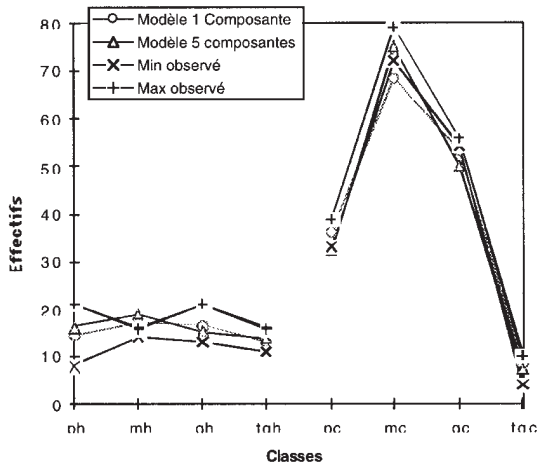


Figure 4b. surface comprise entre 20 et 35 m².

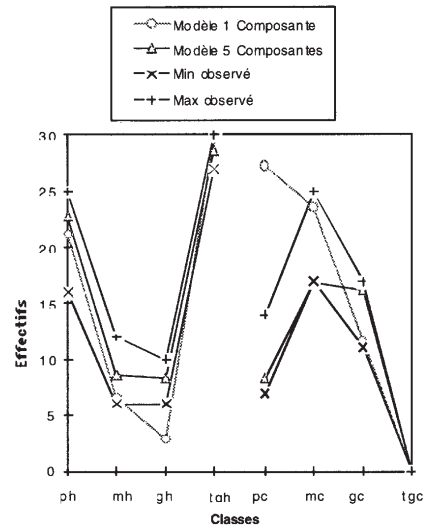


Figure 5b. Type A2.

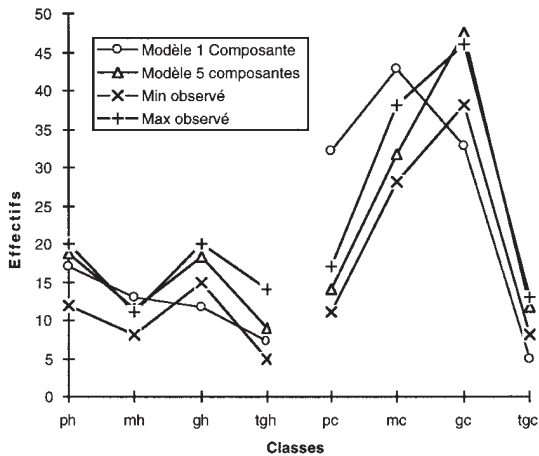


Figure 4c. surface supérieure à 35 m².

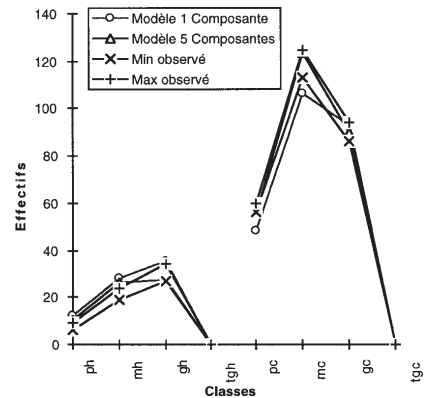


Figure 5c. Type A3.

Figure 4. Effectifs après éclaircie par classe pour les différentes surfaces.

Figure 5. Effectifs après éclaircie par classe pour les différents types.

Tableau VII. Probabilités conditionnelles du peuplement après éclaircie. Résultats sur dix découpes.**Tableau VIIa.** moyenne des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,191	0,070	0,062	0,241	0,078	0,140	0,158	0,061
mh	0,068	0,083	0,092	0,076	0,166	0,270	0,218	0,028
gh	0,055	0,082	0,204	0,041	0,078	0,297	0,233	0,011
tgh	0,306	0,103	0,061	0,116	0,121	0,188	0,103	0,002
pc	0,035	0,077	0,041	0,042	0,258	0,343	0,191	0,015
mc	0,027	0,058	0,071	0,030	0,157	0,348	0,271	0,038
gc	0,039	0,056	0,068	0,020	0,105	0,329	0,300	0,084
tgc	0,089	0,043	0,020	0,002	0,047	0,272	0,487	0,040

Tableau VIIb. différence des résultats moyens estimés - observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,003	0,015	-0,000	-0,034	0,016	0,015	-0,018	0,002
mh	0,008	0,035	-0,003	-0,019	-0,034	0,020	0,004	-0,012
gh	0,000	0,004	0,006	-0,005	-0,011	-0,011	0,017	-0,000
tgh	-0,026	-0,016	-0,006	0,015	0,014	-0,009	0,026	0,002
pc	0,009	-0,008	-0,005	0,004	0,029	-0,018	-0,015	0,002
mc	0,005	0,009	-0,003	-0,003	-0,014	0,031	-0,026	-0,000
gc	-0,003	0,008	0,006	0,004	-0,009	-0,026	0,025	-0,005
tgc	0,003	-0,017	-0,002	0,003	0,006	-0,011	-0,050	0,069

Tableau VIIc. écart type des résultats observés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,043	0,030	0,019	0,028	0,018	0,036	0,030	0,023
mh	0,032	0,024	0,031	0,023	0,032	0,032	0,025	0,017
gh	0,021	0,028	0,059	0,012	0,018	0,050	0,058	0,007
tgh	0,045	0,035	0,015	0,058	0,033	0,031	0,019	0,003
pc	0,010	0,010	0,010	0,010	0,021	0,033	0,038	0,005
mc	0,005	0,010	0,009	0,005	0,024	0,025	0,017	0,009
gc	0,010	0,006	0,019	0,004	0,017	0,019	0,026	0,020
tgc	0,046	0,028	0,013	0,004	0,016	0,064	0,090	0,019

Tableau VIIId. écart type des résultats estimés.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,018	0,013	0,011	0,028	0,018	0,016	0,021	0,022
mh	0,012	0,013	0,012	0,008	0,013	0,021	0,012	0,006
gh	0,015	0,012	0,050	0,010	0,013	0,024	0,031	0,005
tgh	0,026	0,014	0,011	0,031	0,043	0,019	0,026	0,002
pc	0,008	0,007	0,008	0,014	0,020	0,009	0,020	0,005
mc	0,003	0,004	0,006	0,002	0,008	0,015	0,007	0,007
gc	0,006	0,004	0,009	0,003	0,007	0,012	0,018	0,015
tgc	0,041	0,011	0,009	0,002	0,015	0,050	0,059	0,029

4.5. Analyse des conséquences des règles de prélèvement sur le voisinage des arbres

4.5.1. Description de l'exemple envisagé

Le *tableau VIIIa* présente les probabilités conditionnelles pour le peuplement initial. Il confirme l'antagonisme entre les chênes (petits et moyens) et les gros arbres. Par exemple, lorsqu'un arbre du plateau est tgh la probabilité pour un arbre voisin d'être un pc est 0,06 ; de la même manière, la probabilité d'un arbre d'être un pc lorsque son voisin est lui-même un pc est estimée à 0,28. Par conséquent, un arbre a 4,7 fois plus de chance d'être un pc lorsque son voisin est un pc que lorsque son voisin est un tgh.

Le *tableau VIIIb* des probabilités conditionnelles après coupe permet l'analyse des conséquences des règles de prélèvement.

On remarque :

- une accentuation des relations d'antagonisme entre les classes ayant une forte priorité de coupe et les classes ayant une faible priorité. Ainsi, les probabilités conditionnelles sont moins fortes dans le *tableau VIIIa* que dans le *tableau VIIIb* pour
 - (tgc,tgh), (tgc,gh), (tgc,mh), (tgc,ph) (voir règle A1).
 - (tgh,gc), (tgh,gh) (voir règle A2).
 - (ph,gh), (ph,gc) (voir règle A3).

Tableau VIII. Probabilité conditionnelle ajustée lors de la première découpe. Plateau de 6 arbres. $P_{kk'}$: Probabilité d'un arbre d'appartenir à la classe k' , sachant qu'un voisin est dans la classe k .

Tableau VIIIa. peuplement avant éclaircie, modèle cinq composantes.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,20	0,08	0,07	0,06	0,20	0,20	0,17	0,02
mh	0,18	0,10	0,07	0,06	0,17	0,20	0,18	0,04
gh	0,18	0,08	0,15	0,09	0,07	0,20	0,19	0,03
tgh	0,21	0,11	0,14	0,10	0,06	0,16	0,19	0,03
pc	0,17	0,06	0,03	0,01	0,28	0,27	0,15	0,01
mc	0,15	0,07	0,06	0,03	0,24	0,26	0,16	0,02
gc	0,17	0,08	0,08	0,04	0,17	0,22	0,19	0,04
tgc	0,15	0,11	0,08	0,06	0,11	0,17	0,26	0,06

Tableau VIIIb. peuplement après éclaircie, modèle cinq composantes.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,19	0,08	0,07	0,22	0,09	0,14	0,16	0,05
mh	0,08	0,12	0,07	0,06	0,15	0,28	0,22	0,02
gh	0,07	0,06	0,19	0,04	0,04	0,29	0,29	0,02
tgh	0,30	0,08	0,06	0,17	0,10	0,15	0,12	0,00
pc	0,04	0,07	0,02	0,03	0,30	0,32	0,19	0,02
mc	0,03	0,06	0,06	0,03	0,14	0,39	0,25	0,03
gc	0,04	0,06	0,08	0,02	0,11	0,31	0,30	0,07
tgc	0,09	0,03	0,03	0,00	0,06	0,23	0,44	0,11

Tableau VIIIc. peuplement après éclaircie, modèle une composante.

	ph	mh	gh	tgh	pc	mc	gc	tgc
ph	0,15	0,01	0,01	0,45	0,21	0,10	0,03	0,04
mh	0,01	0,11	0,10	0,03	0,12	0,36	0,27	0,00
gh	0,00	0,05	0,15	0,00	0,05	0,34	0,40	0,00
tgh	0,26	0,02	0,00	0,11	0,46	0,15	0,01	0,00
pc	0,08	0,04	0,04	0,28	0,23	0,17	0,11	0,06
mc	0,02	0,06	0,11	0,04	0,08	0,34	0,29	0,07
gc	0,00	0,04	0,12	0,00	0,05	0,29	0,41	0,07
tgc	0,03	0,00	0,00	0,00	0,13	0,36	0,41	0,06

- une accentuation des relations de voisinage entre arbres des classes à faible priorité de coupe. Ainsi, pour
 - (tgc,gc) (voir règle A1).
 - (tgh,ph), (pc,tgh) (voir règle A2).
- des situations intermédiaires plus complexes qui peuvent être regardées au cas par cas. Ainsi (tgh,pc) était plus forte dans le peuplement initial (*tableau VIIIa*).

4.5.2. Influence de la structure initiale

À stratégie de prélèvement donnée, la structure spatiale après éclaircie dépend de la structure initiale. La situation après coupe du peuplement (*tableau VIIIb*) peut être comparée avec celle obtenue avec une structure théorique, en particulier aléatoire (*tableau VIIIc*). Ainsi, dans le cas aléatoire, les associations des pc avec les tgh, gh, tgc sont beaucoup plus fortes même après coupe. On note également une forte relation (ph, pc) : la priorité de coupe des ph sur les pc dans les trois règles a une action moindre en structure aléatoire.

5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

(i) Le logiciel, existant sous forme de maquette, permet de déterminer le peuplement final lorsque les paramètres sont fixés. Dans les paramètres de stratégie des prélèvements figure la partition des états du plateau dont la redéfinition entraîne une programmation spécifique de modules. Néanmoins, certains cas génériques sont proposés. Dans l'exemple traité, tgc pourrait être n'importe quelle autre classe. Un autre cas a été mis en œuvre pour viser l'homogénéisation spatiale des essences, en coupant davantage l'espèce majoritaire hêtre ou chêne dans le plateau (trois types de plateau selon que $c > h$, $c < h$, $c = h$; c et h étant un regroupement de classes quelconque).

(ii) Le problème inverse paraît tout aussi intéressant (P. Duplat, communication personnelle) et son étude systématique est nécessaire.

D'une part, il s'agit de combiner et d'ajuster les paramètres de prélèvement en vue d'atteindre un histogramme d'arbres coupés ou encore un peuplement final représenté par les pourcentages de chaque essence, la distribution diamétrale, la loi du plateau. Quelques essais menés à l'aide de méthodes de recherche opérationnelle (procédure par séparation et évaluation progressive) sont encourageants.

D'autre part, il s'agit de comparer les stratégies modélisées à celles utilisées en pratique à partir de cartographies de peuplements avant et après coupe. Une première

étape sera de compléter la gamme des stratégies de prélèvements modélisées. On pourra également comparer deux sylviculteurs, en particulier lorsqu'ils enlèvent le même histogramme des diamètres, mais n'enlèvent pas les mêmes arbres (M. Bruciamacchie, communication personnelle).

(iii) Le modèle de structure présente lui aussi quelques limites.

Le choix des échelles spatiales et des variables à prendre en compte dans la stratégie de prélèvement reste un problème délicat. Elles doivent être pertinentes pour décrire objectivement le peuplement, ses valeurs économiques et sociales ou les pratiques. Des variables de qualité des arbres, d'état de santé, de régénération (les très petits arbres ont été écartés ici) seraient nécessaires.

Le modèle reste également à redéfinir pour prendre en compte une stratégie basée sur plusieurs échelles. On peut penser introduire un nombre d'arbres variable par plateau, une modélisation de la loi conjointe (n, Su), une liaison entre paramètres de structure de plateaux voisins.

Remerciements : Cette étude a été réalisée dans le cadre du programme croissance de l'INRA et a bénéficié d'un financement du GIP Ecofor, dans le « Programme de recherche sur les forêts hétérogènes ». Je remercie mes collègues de l'unité DSF M. Bruciamacchie, J.F. Dhote, F. Goreaud, J.C. Herve, pour leurs idées et leurs lectures attentives du manuscrit. Je remercie également D. Rittié pour avoir mis à ma disposition et commenté les données de cette étude. Finalement, je remercie les lecteurs pour leurs commentaires constructifs qui ont conduit à une amélioration de la présentation de cet article.

RÉFÉRENCES

- [1] Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion), *J. Roy. Stat. Soc. B.* 39 (1977) 1–38.
- [2] Franc A., Besnard J., Klein E., Simulation de la dynamique de peuplements forestiers hétérogènes : quelques pistes à l'aide de modèles simples, *Rev. For. Française XLVII* (1995) 183–194.
- [3] Goreaud F., Courbaud B., Collinet F., Spatial structure analysis applied to modelling of forest dynamics: a few examples, in: *Proceeding of IURO Workshop "empirical and process-based models for tree and stand growth simulation"*, Oeiras 21–27 September 1997.
- [4] Ningre F., Comparaison de différentes modalités d'éclaircie du chêne sessile. Premiers résultats d'un dispositif expérimental situé en forêt domaniale de Réno-Valdieu (Orne), *Rev. For. Française* n° 2 (1990) 254–264.

[5] Pierrat J.-C., Hervé J.-C., Peyron J.-L., Modélisation de la structure d'un peuplement et simulation de sylvicultures locales et sélectives, Can. J. For. Res. 27 (6) (1997) 849–858.

[6] Pretzsch H., Struktur und Leistung naturgemäss bewirtschaftete Eichen Buchen Mischbestände in Unterfranken, Allgemeine Forstzeitschrift. 6 (1993) 281–284.

[7] Spellmann H., Concepts for mixed stand studies, Actes du centenaire de l'IUFRO, Berlin, 1992, 10 p.

ANNEXE

Calcul des lois de probabilité des statistiques d'ordre dans une population finie sans structure.

1. Notation

Soit m le nombre d'individus de la population. Soit une division de ce peuplement en K classes et un ordre sur ces classes. Numérotons les arbres d'une même classe, de façon que les arbres du peuplement soient ordonné.

Soit r le rang du r ème individu dans le peuplement ordonné.

Par exemple, si l'effectif de la première classe est $C1$, les rangs des arbres de la première classe vont de 1 à $C1$; si l'effectif de la seconde classe est $C2$, les rangs des arbres de la seconde classe vont de $C1+1$ à $C1+C2$.

Soit un échantillon aléatoire de taille n .

Appelons $D^{(i)}$ la statistique d'ordre i ($i=1, n$): $D^{(1)}$ est le plus petit rang dans l'échantillon, $D^{(2)}$ le second, etc.

2. Loi marginale

Soit $P_r^i = \Pr\{D^{(i)} = r\}$ $i=1, n$ et $r=i, m-n+i$.

$$P_r^i = \frac{\binom{r-1}{i-1} \binom{m-r}{n-i}}{\binom{m}{n}}$$

$$(1) \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k\} = \sum_{r \in \text{classe } k} P_r^i$$

3. Lois conjointes $(D^{(i)}, D^{(j)})$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$

Soit $P_{ru}^{ij} = \Pr\{D^{(i)} = r \text{ et } D^{(j)} = u\}$ pour $r=i, m-n+i$ et $u=r+j-i, m-n+j$

$$P_{ru}^{ij} = \frac{\binom{r-1}{i-1} \binom{u-r-1}{j-i-1} \binom{m-u}{n-j}}{\binom{m}{n}}$$

$$(2) \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k, D^{(j)} \in \text{classe } l\} = \sum_{r \in \text{classe } k} \sum_{u \in \text{classe } l} P_{ru}^{ij}$$

4. La loi des upplets

Grâce à la propriété markovienne, la loi des couples permet d'obtenir la loi des upplets. Par exemple pour les triplets, on a :

$$\Pr\{D^{(i)} = r \text{ et } D^{(j)} = l \text{ et } D^{(q)} = s\} = \Pr\{D^{(i)} = r / D^{(j)} = l\} \Pr\{D^{(j)} = l \text{ et } D^{(q)} = s\}.$$

5. Loi conjointe de 2 arbres (X, Y) appartenant à un plateau de loi $(D^{(1)}, \dots, D^{(w)})$ pour $w > 1$:

$$\Pr\{X \in \text{classe } k \text{ et } Y \in \text{classe } q\} = \frac{2 \sum_{i=1}^w \sum_{j>1}^w \Pr\{D^{(i)} \in \text{classe } k \text{ et } D^{(j)} \in \text{classe } q\}}{w(w-1)}$$